THESE

présentée

A L'ECOLE NATIONALE
DES PONTS ET CHAUSSEES

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

par

Ioannis V.PAPADOPOULOS

SUJET :

FATIGUE POLYCYCLIQUE DES METAUX
UNE NOUVELLE APPROCHE

Soutenue le 18 Décembre 1987
devant le jury composé de :

MM.	B. HALPHEN	Président
	M. BERVEILLER H.P. LIEURADE	Rapporteurs
	K. DANG VAN J.L. CHABOCHE D. RADENKOVIC P. DE ROO A. MARCE	Examinateurs

FATIGUE POLYCYCLIQUE DES METAUX : UNE NOUVELLE APPROCHE

PREAMBULE

La fatigue des structures métalliques sollicitées par des charges périodiques est un phénomène qui est traditionnellement étudié à deux niveaux. Suivant que le chargement est appliqué durant un grand ou petit nombre de cycles, la fatigue est qualifiée de polycyclique ou d'oligocyclique respectivement. La différence fondamentale entre ces deux domaines est que les déformations plastiques de la structure, importantes dans le cas de la fatigue oligocyclique, sont au contraire négligeables dans le cas de la fatigue polycyclique.

Dans le cadre de la fatigue polycyclique, nous nous sommes intéressés à deux problèmes particuliers, chacun d'eux faisant l'objet d'une partie de la thèse, qui est donc composée de deux parties.

Le premier problème est celui de l'endurance illimitée d'une structure. Il s'agit alors de déterminer le niveau de chargement périodique en deça duquel aucune rupture locale ne se produit dans la structure au cours d'un nombre très grand voire infini de cycles de charge. Ceci nous conduira à élaborer un critère de non nucléation des fissures de fatigue.

Le second problème étudié, celui de l'endurance limitée, est en quelque sorte, le complémentaire du précédent. Lorsque le niveau de chargement est tel que le critère de non nucléation est violé, des fissures de fatigue apparaissent à partir d'un certain nombre de cycles de charge. Le calcul du nombre de cycles à la nucléation d'une fissure de fatigue fera donc l'objet de la seconde partie.

Tout au long de cette thèse, l'approche microscopique est systématiquement utilisée aussi bien pour la description que pour la modélisation des phénomènes liés à la fatigue polycyclique des métaux.

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE

	Page
CHAPITRE I - GENERALITES	11
I.1 - Position du problème et plan du travail	13
I.2 - Classification des chargements périodiques	17
I.3 - Quelques définitions utiles	26
CHAPITRE II - CRITERES DE FATIGUE TRADITIONNELS	41
II-1 - Classement des critères	43
II-2 - Critères empiriques	44
II.3 - Critères de fatigue issus du critère de Tresca	53
II.4 - Critères de fatigue issus du critère de von Mises	69
II.5 - Remarques sur les critères de fatigue traditionnels	86

	Page
CHAPITRE III - L'APPROCHE MICROSCOPIQUE	89
III.1 - Le choix de l'approche microscopique	91
III.2 - Passage macroscopique - microscopique	102
III.3 - Le critère de Dang Van	110
III.4 - Un nouveau critère de fatigue	121
CHAPITRE IV - APPLICATIONS	165
IV.1 - Essais sous chargement à trajet radial ou affine	167
IV.2 - Essais de chargement périodique général	191
CONCLUSION	219
REFERENCES	223
ANNEXE 1 - La plus petite hypersphère circonscrite à une courbe donnée	237

DEUXIEME PARTIE

	Page
CHAPITRE I - INTRODUCTION	249
I.1 - Position du problème	251
1.2 - Comportement élastoplastique du cristal	257
CHAPITRE II - CRISTAL A DEUX PHASES DE COMPORTEMENT CYCLIQUE	267
II.1 - Modélisation du comportement élastoplastique du cristal	269
II.2 - Calcul du nombre de cycles à la nucléation d'une microfissure de fatigue	282
II.3 - Cumul du dommage	317
CHAPITRE III - CRISTAL A TROIS PHASES DE COMPORTEMENT CYCLIQUE	373
III.1 - Modélisation du comportement élastoplatique du cristal	375
III.2 - Calcul du nombre de cycles à la nucléation d'une fissure de fatigue	382
III.3 - Cumul du dommage	397
CONCLUSION	413
REFERENCES	419
PERSPECTIVES	425
RESUME	429
ABSTRACT	433
TABLE DES MATIERES DETAILLEE	437

PREMIERE PARTIE

ENDURANCE ILLIMITEE :

CRITERE DE NON NUCLEATION

DES FISSURES DE FATIGUE

CHAPITRE I

GENERALITES

I-1 POSITION DU PROBLEME ET PLAN DU TRAVAIL

I.1.1 POSITION DU PROBLEME

Dans les expériences réalisées en Laboratoire pour étudier le phénomène de la fatigue des métaux, les sollicitations imposées sont en général des superpositions d'efforts variables autour d'une valeur moyenne de même nature. Les sollicitations les plus fréquentes sont les tractions, les flexions et les torsions. Les résultats expérimentaux des essais uniaxiaux en fatigue polycyclique sont traditionnellement représentés dans un diagramme de Wöhler. Pour un essai déterminé, soit Σ_a l'amplitude de la contrainte appliquée (i.e la demi-différence entre les valeurs maximales et minimales prises par la contrainte au cours d'un cycle de chargement). L'éprouvette soumise à un niveau d'amplitude Σ_a , se rompt après un certain nombre N de cycles de charge. En portant Σ_a en fonction de N, on obtient la courbe S-N ou courbe de Wöhler, qui dépend en général du niveau de la contrainte moyenne appliquée Σ_m. Pour une large gamme de métaux, cette courbe admet une asymptote horizontale lorsque N devient grand. La valeur de Σ_a correspondante, notée Σ_e, est appelée limite d'endurance pour la sollicitation considérée. Cette valeur a une grande importance pratique car elle correspond à l'amplitude

maximale de la contrainte appliquée, pour laquelle il n'y aura pas rupture par fatigue. Il est important de noter que la limite d'endurance est nettement inférieure à la limite d'élasticité du matériau, associée au même type de sollicitation.

On pourrait encore pour des trajets de charge donnés, définir la notion de surface d'endurance, enveloppe des trajets qui n'entraînent pas la rupture. Pour des trajets de charges affines dans l'espace des contraintes et centrés autour d'un même état moyen, cette surface est définie par les limites d'endurance dans les différentes directions de l'espace.

Les premières études en fatigue multiaxiale ont été réalisées dans cet esprit. Citons, par exemple Gough et Pollard qui, à partir d'expériences en flexion-torsion sinusoïdales en phase et centrées sur la valeur nulle, ont obtenu une courbe d'endurance dans le plan amplitude de la contrainte de flexion-amplitude de la contrainte de torsion, largement utilisée encore aujourd'hui.

Le problème du critère de fatigue, qui fait l'objet de la première partie de la thèse, peut être posé de la manière suivante : dans l'espace des contraintes, nous considérons des trajets de charge périodiques, entièrement situés à l'intérieur du domaine d'élasticité du matériau ; nous cherchons à distinguer les trajets au cours desquels la rupture se produit après un nombre suffisant de cycles, de ceux dont l'application peut être supportée par le métal pour un nombre très grand, voire infini, de cycles. Le critère qui nous permet de faire la discrimination entre

ces deux types de chargements, constitue le critère de fatigue. Traditionnellement, le critère de fatigue est défini par la valeur limite d'une contrainte équivalente, exprimée en fonction des amplitudes des composantes du tenseur des contraintes. Il est ensuite calé sur des données expérimentales obtenues pour des chargements uniaxiaux.

I.1.2 PLAN DU TRAVAIL

Le problème du critère de fatigue fait l'objet de la première partie de la thèse, qui est composée de quatre chapitres.

Dans les deux paragraphes suivants du chapitre I, nous donnons une classification des chargements périodiques, ainsi que quelques définitions des grandeurs que nous utiliserons à la suite.

Les quatre premiers paragraphes du chapitre II font le point sur diverses propositions relatives au critère de fatigue trouvées dans la littérature. Dans un cinquième et dernier paragraphe, nous analysons la validité de ces approches classiques.

Le chapitre III traite de l'approche microscopique du critère de fatigue. Historiquement, c'est Orowan qui, pour la première fois, a utilisé une approche microscopique en fatigue uniaxiale. Dang Van l'a ensuite étendue à la

fatigue multiaxiale. Dans les deux premiers paragraphes, nous examinons les hypothèses fondamentales qui nous permettent de réaliser le passage à l'échelle microscopique ainsi que l'interprétation physique du critère de fatigue. Dans les deux paragraphes suivants, nous présentons tout d'abord, le critère de Dang Van, puis nous formulons un nouveau critère, proche du précédent, mais mieux adapté au calcul numérique.

Dans le chapitre IV, nous confrontons cette nouvelle formulation aux résultats expérimentaux. Enfin, en conclusion, nous citons quelques perspectives créées par l'adoption de l'approche microscopique de la fatigue des métaux. L'une d'elles (Endurance limitée : nombre de cycles à la nucléation d'une fissure de fatigue) sera développée dans la seconde partie de cette thèse.

I-2 CLASSIFICATION DES CHARGEMENTS PERIODIQUES

Nous avons déjà fait remarquer que la limite d'endurance pour une sollicitation donnée est nettement inférieure à la limite d'élasticité du matériau associée au même type de sollicitation. Dans le cadre du problème du critère de fatigue, nous nous intéressons en général à des charges peu élevées, si bien que la réponse de la structure sollicitée reste purement élastique. Comme les propriétés élastiques du matériau sont supposées indépendantes du temps, les caractéristiques de l'évolution dans le temps des charges appliquées à la structure sont identiquement reproduites à l'échelle locale en tout point $\underline{x}$ du corps. Les définitions relatives aux différents types de chargement seront donc données au niveau des contraintes $\Sigma_{ij}(\underline{x})$.

La classe des chargements la plus générale qui sera considérée dans le présent travail est celle des chargements périodiques. Il est judicieux d'adopter une représentation géométrique du trajet de chargement. A un instant t donné, l'état des contraintes peut être représenté par un point dans l'espace des contraintes. Pour un chargement périodique ce point représentatif décrit une courbe Φ strictement fermée.

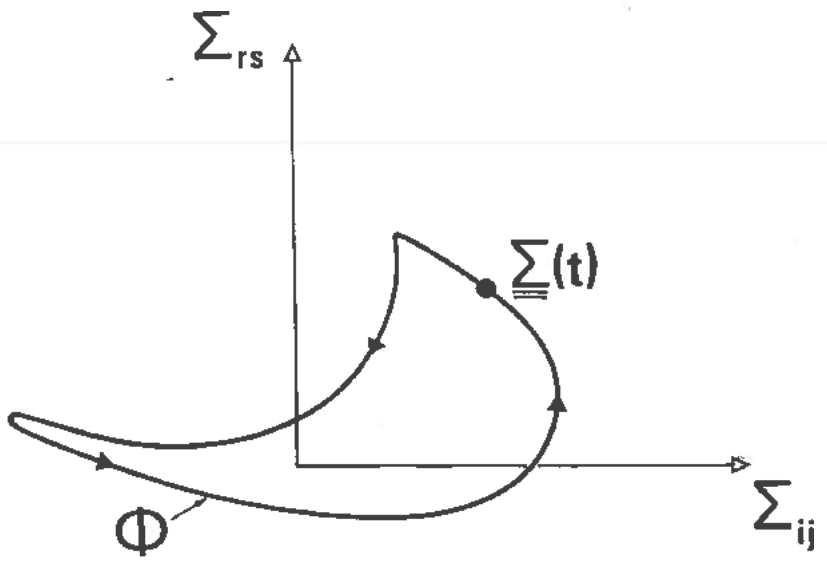


Figure I.1 Trajet de chargement périodique dans l'espace des contraintes.

La période T du chargement est le temps nécessaire pour que la courbe Φ soit parcourue une fois. Il s'agit donc du plus petit intervalle de temps T vérifiant

$$\Sigma_{ij}(t+T) = \Sigma_{ij}(t) \quad , \forall t \tag{I.2.1}$$

L'ensemble des valeurs prises par les composantes Σ_{ij} au cours d'une période est appelé cycles des contraintes. Les $\Sigma_{ij}(t)$ étant des fonctions périodiques, nous adoptons la décomposition suivante,

$$\Sigma_{ij}(t) = \Sigma_{\underline{ij},a}\, f_{\underline{ij}}(t) + \Sigma_{ij,m} \tag{I.2.2}$$

où

$$\Sigma_{ij,a} = \frac{1}{2}\left(\max_{t\in T} \Sigma_{ij}(t) - \min_{t\in T} \Sigma_{ij}(t)\right) \qquad (I.2.3)$$

est l'amplitude de la contrainte $\Sigma_{ij}(t)$, et

$$\Sigma_{ij,m} = \frac{1}{2}\left(\max_{t\in T} \Sigma_{ij}(t) + \min_{t\in T} \Sigma_{ij}(t)\right) \qquad (I.2.4)$$

est sa valeur moyenne. Finalement :

$$f_{ij}(t) = \frac{\Sigma_{ij}(t) - \Sigma_{ij,m}}{\Sigma_{ij,a}} \qquad (I.2.5)$$

est une fonction scalaire périodique à valeurs dans [-1,1]. Dans l'expression (I.2.2), la convention d'Einstein n'est pas valable pour les indices soulignés.

En pratique, lors des expériences, les fonctions $f_{ij}(t)$ sont souvent sinusoïdales de même fréquence,

$$f_{ij}(t) = \sin(\omega t - \varphi_{ij}) \qquad (I.2.6)$$

avec

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (I.2.7)$$

ou sinusoïdales de fréquences différentes mais commensurables :

$$f_{ij}(t) = \sin(K_{ij}\omega t) \qquad (I.2.8)$$

où les K_{ij} sont des entiers positifs. La période de chargements est alors :

$$T = \frac{2\pi}{\text{ppcd}(K_{ij})\cdot\omega} \qquad (I.2.9)$$

où $\text{ppcd}(K_{ij})$ désigne le plus petit commun diviseur des entiers K_{ij}.

Un sous-ensemble des chargements périodiques est constitué des chargements affines. Leur caractéristique commune est que la courbe représentative du trajet de chargement est un segment de droite dans l'espace des contraintes (Fig. I.2).

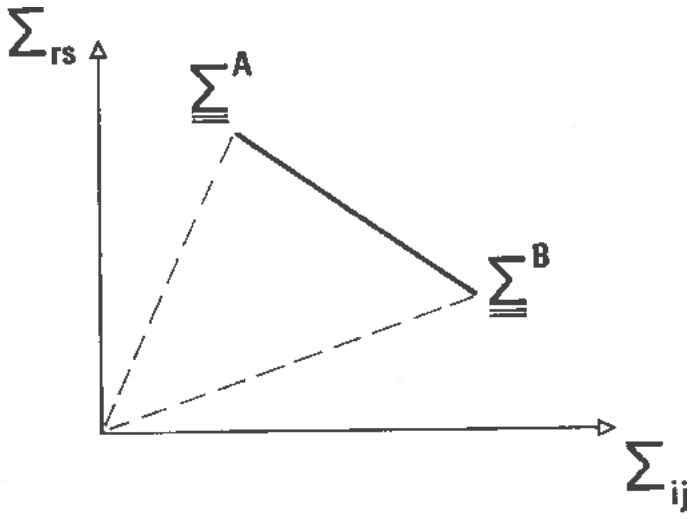


Figure I.2 Trajet d'un chargement affine dans l'espace des contraintes.

Si nous appelons Σ^A_{ij} et Σ^B_{ij} les états de contraintes correspondant aux extrémités du trajet (Fig. I.2), la décomposition (I.2.2) s'écrit :

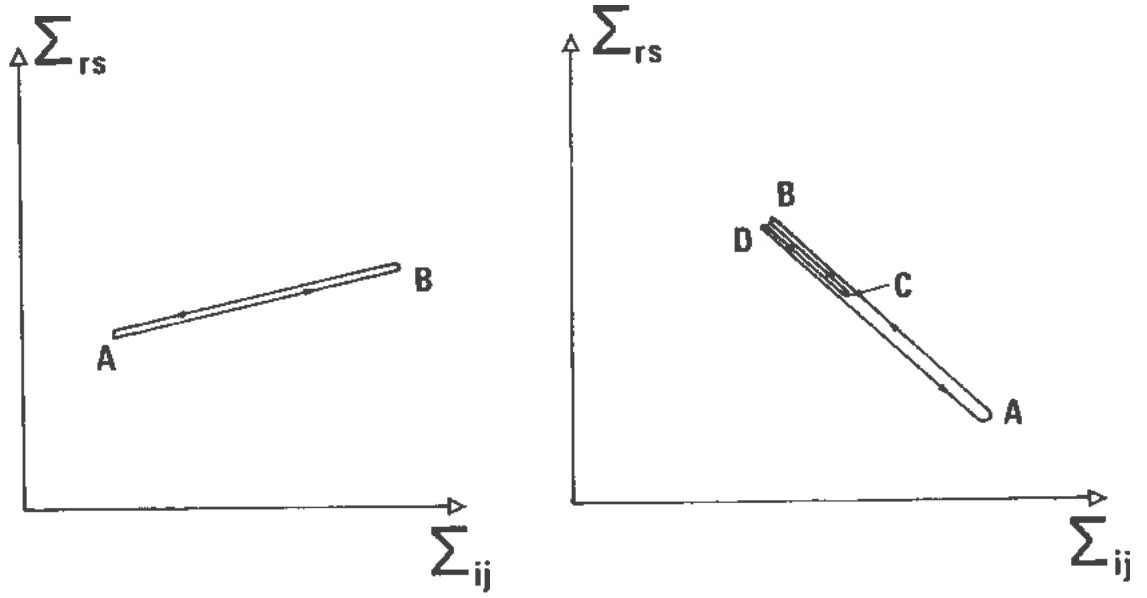
$$\Sigma_{ij}(t) = \pm f(t)\, \Sigma_{ij,a} + \Sigma_{ij,m} \qquad (I.2.10)$$

où

$$\Sigma_{ij,a} = \frac{1}{2} \left| \Sigma^A_{ij} - \Sigma^B_{ij} \right| \qquad (I.2.11)$$

$$\Sigma_{ij,m} = \frac{1}{2} \left(\Sigma^A_{ij} + \Sigma^B_{ij} \right) \qquad (I.2.12)$$

f(t) est une fonction scalaire périodique à valeur dans [-1,1]. Le signe qui la précède dans l'équation (I.2.10) dépend de la position relative des valeurs extrêmes Σ^A_{ij} et Σ^B_{ij} . Si la fonction f(t) varie d'une façon monotone entre ses valeurs extrêmes, le chargement est dit <u>affine simple</u>. Dans le cas contraire, il sera qualifié d'affine complexe (voir Fig. I.3).



<u>a.</u> affine simple
A → B → A

<u>b.</u> affine complexe
A → B → C → D → A

<u>Figure I.3</u> Exemples de trajet de chargements affines.

Pour un chargement affine simple, la donnée du <u>tenseur variation des contraintes</u> $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$

$$\Delta\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^A - \underline{\underline{\Sigma}}^B \qquad \text{(I.2.13)}$$

et du <u>tenseur de l'état moyen des contraintes</u> $\underline{\underline{\Sigma}}_m$

$$\underline{\underline{\Sigma}}_m = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\Sigma}}^A + \underline{\underline{\Sigma}}^B\right) \qquad \text{(I.2.14)}$$

est suffisante pour décrire complètement le cycle de chargement. Nous attirons l'attention du lecteur sur les points suivants :

- Il est indispensable que $\underline{\underline{\Sigma}}^A$ et $\underline{\underline{\Sigma}}^B$ soient exprimés dans le même repère.

- L'ordre dans lequel sont pris les états extrêmes $\underline{\underline{\Sigma}}^A$ et $\underline{\underline{\Sigma}}^B$ dans la définition de $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ n'intervient pas dans le calcul des différentes grandeurs qui seront définies dans le paragraphe suivant.

- S'il y a bien identité entre les composantes du tenseur de l'état moyen des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}_m$ et les valeurs moyennes $\Sigma_{ij,m}$ définies par (I.2.12), les composantes du tenseur variation des contraintes $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ <u>ne sont pas</u> le double des amplitudes $\Sigma_{ij,a}$. Rappelons que $\Sigma_{ij,a}$ est, par définition, une grandeur positive alors que $\Delta\Sigma_{ij}$ peut être négative.

- En général, au cours d'un chargement périodique affine, les directions principales du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ <u>varient</u>.

Parmi les chargements affines, nous pouvons encore distinguer les chargements proportionnels que nous qualifierons aussi de radiaux. Ce sont ceux pour lesquels le trajet du chargement dans l'espace des contraintes, est un segment porté par une droite issue de l'origine. Dans les expériences réalisées en fatigue, les chargements proportionnels simples sont les plus fréquemment utilisés (Fig. I.4).

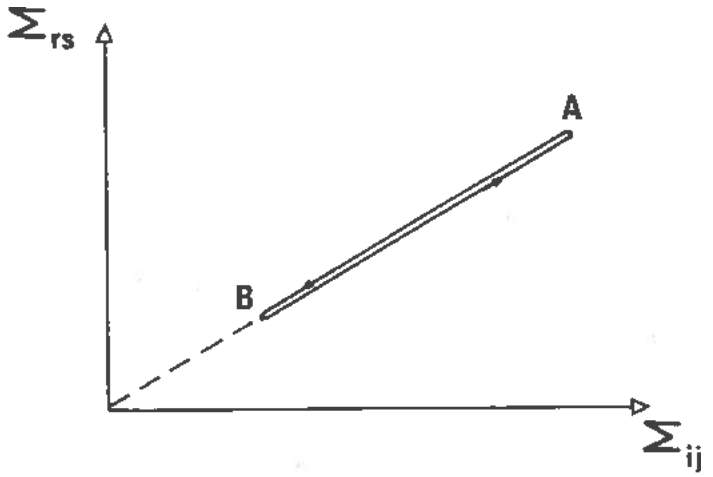


Figure I.4 Trajet de chargement proportionnel simple.

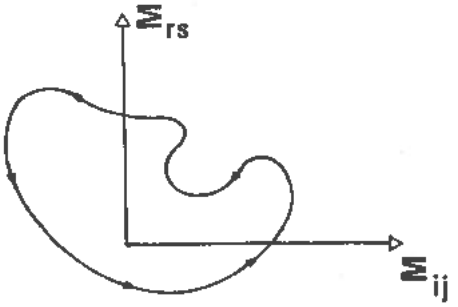
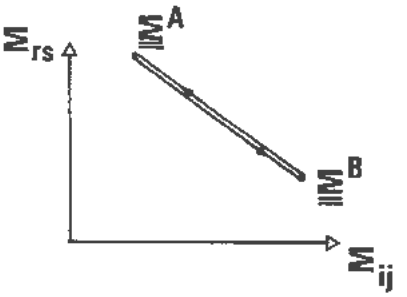
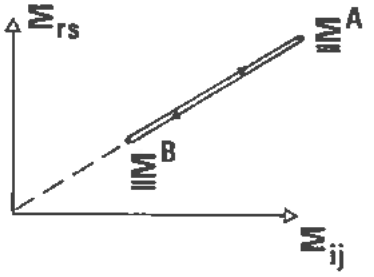
Lors d'un chargement proportionnel, les directions principales du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ sont fixes. Elles coïncident avec les directions principales du tenseur variation des contraintes $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ (équ. I.2.13) et celles du tenseur de l'état moyen des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}_m$ (équ. I.2.14).

Enfin, nous classons les chargements proportionnels simples en deux sous-groupes. Les chargements radiaux alternés sont ceux dont le trajet de chargement est centré à l'origine (i.e. l'état moyen des contraintes est nul). Ceux dont l'état moyen des contraintes n'est pas nul seront qualifiés de radiaux asymétriques.

Dans la littérature, les formulations des critères de fatigue classiques ne sont en général valables que pour des chargements proportionnels [33]. C'est pourquoi nous allons, dans le paragraphe suivant, donner les définitions qui nous permettront d'étendre sans ambiguïté le champ d'application des critères traditionnels au cas des chargements affines ou même périodiques généraux.

TABLEAU I

DEFINITION DES CHARGEMENTS

Type de chargement	Trajet correspondant
Chargement périodique général	
Chargement périodique affine simple	 $\Delta\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^A - \underline{\underline{\Sigma}}^B$
Chargement périodique proportionnel ou radial	 $\Delta\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^A - \underline{\underline{\Sigma}}^B$

I-3 QUELQUES DEFINITIONS UTILES

L'objectif de ce paragraphe est de définir un certain nombre de quantités souvent utilisées dans la formulation des critères traditionnels de fatigue. Les définitions sont d'abord données pour un chargement périodique général puis particularisées pour un chargement périodique affine ou même proportionnel.

En matière de fatigue, deux grandeurs fréquemment utilisées sont la contrainte normale sur un plan matériel d'un corps chargé et la contrainte tangentielle associée. Si O est un point du corps chargé et Oxyz un repère lié à la matière, un plan matériel P est défini par son vecteur normal unitaire $\underline{n}$. Le vecteur contrainte $\underline{\Sigma}_n$ relatif au plan P est le produit une fois contracté du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$ en O et du vecteur $\underline{n}$, les trois quantités $\underline{\Sigma}_n$, $\underline{n}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}$ étant exprimées dans le même repère Oxyz (Fig.I.5):

$$\underline{\Sigma}_n = \underline{\underline{\Sigma}}.\underline{n} \qquad (I.3.1)$$

La contrainte normale $\underline{N}$ au plan P, appelée tension, est la projection du vecteur contrainte $\underline{\Sigma}_n$ sur la normale $\underline{n}$ (Fig. I.5) :

$$\underline{N} = (\underline{n}.\underline{\Sigma}_n)\ \underline{n} \qquad (I.3.2)$$

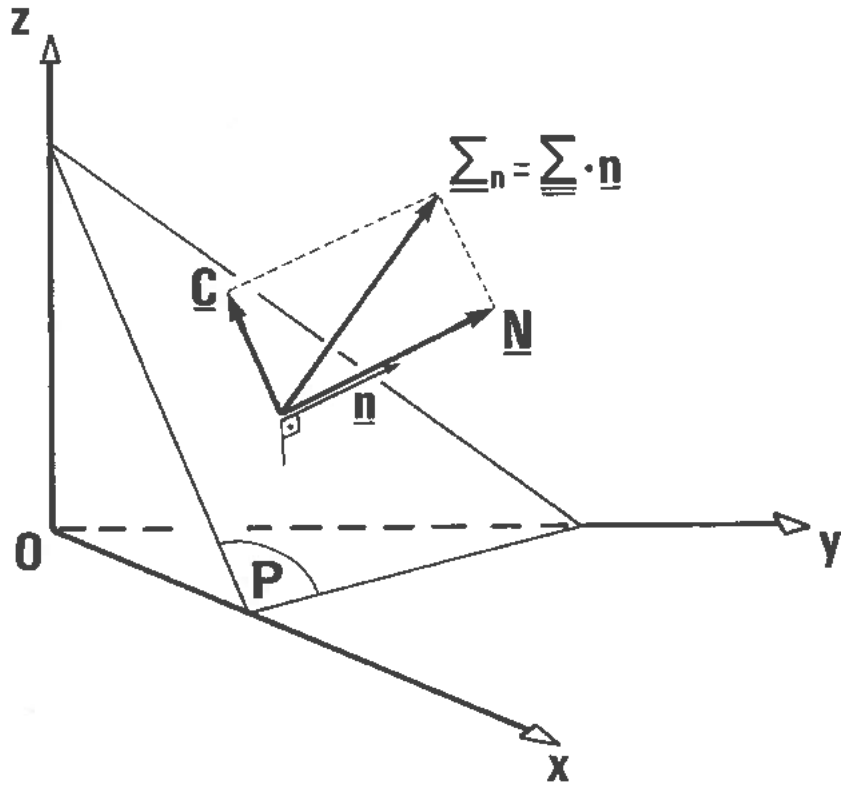


Figure I.5 Vecteur contrainte, tension et cission relatifs à un plan matériel de normale $\underline{n}$.

Le module $\|\underline{N}\|$ de la tension est donc :

$$\|\underline{N}\| = |\underline{n}.\underline{\underline{\Sigma}}.\underline{n}| \qquad (I.3.3)$$

La contrainte $\underline{C}$ tangentielle au plan P, appelée aussi cission est la projection orthogonale du vecteur contrainte $\underline{\Sigma}_n$ sur le plan P (Fig. I.5) :

$$\underline{C} = \underline{\underline{\Sigma}}.\underline{n} - (\underline{n}.\underline{\underline{\Sigma}}.\underline{n})\ \underline{n} \qquad (I.3.4)$$

Le module $\|\underline{C}\|$ de la cission est donc :

$$\|\underline{C}\| = \left[\|\underline{\underline{\Sigma}}.\underline{n}\|^2 - (\underline{n}\cdot\underline{\underline{\Sigma}}\cdot\underline{n})^2 \right]^{1/2} \qquad (I.3.5)$$

Au cours d'un chargement périodique, la pointe du vecteur cission $\underline{C}$ décrit dans le plan P une courbe fermée ψ (Fig. I.6).

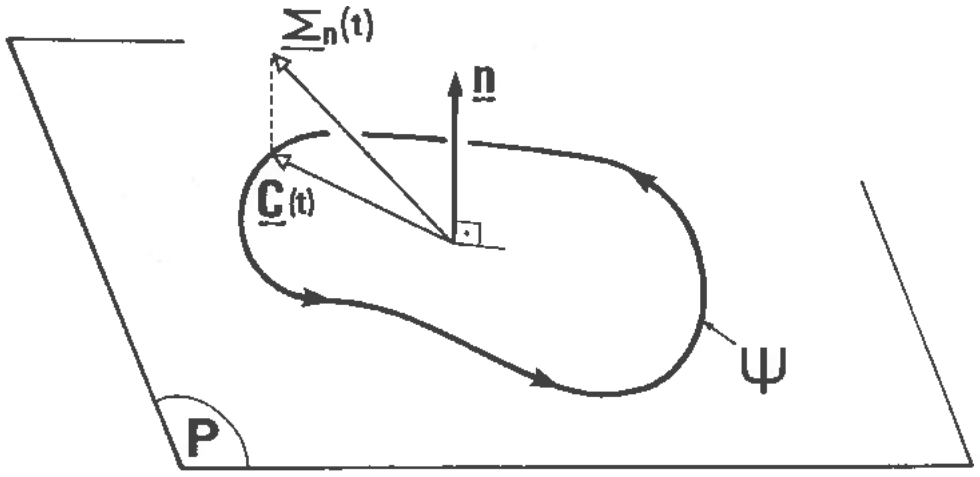


Figure I.6 Evolution de la cission $\underline{C}(t)$ sur un plan matériel P, lors d'un chargement périodique.

Nous définissons l'amplitude de la cission sur le plan P, notée $C_a(\underline{n})$ comme étant le demi-diamètre de la courbe ψ. Le diamètre d'une courbe plane étant la longueur de sa corde la plus longue, nous avons :

$$C_a(\underline{n}) = \frac{1}{2} \max_{t_\circ \in T} \left\{ \max_{t \in T} \| \underline{C}(t) - \underline{C}(t_\circ) \| \right\} \qquad (I.3.6)$$

soit encore d'après (I.3.4) :

$$C_a(\underline{n}) = \frac{1}{2} \max_{t_\circ \in T} \left\{ \max_{t \in T} \left\{ \| [\underline{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\underline{\Sigma}}(t_\circ)] \cdot \underline{n} \|^2 - [\underline{n} \cdot [\underline{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\underline{\Sigma}}(t_\circ)] \cdot \underline{n}]^2 \right\}^{1/2} \right\} \qquad (I.3.7)$$

L'amplitude de la tension normale au plan P, notée $N_a(\underline{n})$, est définie par :

$$N_a(\underline{n}) = \frac{1}{2} \left[\max_{t \in T} (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(t) \cdot \underline{n}) - \min_{t \in T} (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(t) \cdot \underline{n}) \right] \qquad (I.3.8)$$

Nous pouvons aussi définir la valeur moyenne correspondante, notée $N_m(\underline{n})$, par :

$$N_m(\underline{n}) = \frac{1}{2} \left[\max_{t \in T} (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(t) \cdot \underline{n}) + \min_{t \in T} (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(t) \cdot \underline{n}) \right] \qquad (I.3.9)$$

Il en résulte que la valeur maximale $N_{max}(\underline{n})$ de la tension est tout simplement :

$$N_{max}(\underline{n}) = N_m(\underline{n}) + N_a(\underline{n}) \qquad (I.3.10)$$

Lorsque le chargement périodique est affine ou même proportionnel, les quantités précédentes s'expriment plus simplement en fonction des tenseurs variation et état moyen des contraintes $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}_m$:

$$C_a(\underline{n}) = \frac{1}{2} \left[\| \Delta\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \|^2 - (\underline{n} \cdot \Delta\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n})^2 \right]^{1/2} \qquad (I.3.11)$$

$$N_a(\underline{n}) = \frac{1}{2} \left| \underline{n} \cdot \Delta \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \right| \qquad (I.3.12)$$

$$N_m(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}_m \cdot \underline{n} \qquad (I.3.13)$$

La définition des tenseurs $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}_m$ est donnée par les équations (I.2.13) et (I.2.14), à la suite desquelles nous avons signalé quelques erreurs typiques qui peuvent être commises en manipulant ces tenseurs.

Une autre quantité qui intervient souvent dans la formulation des critères de fatigue, est l'amplitude de la racine carrée du second invariant du déviateur des contraintes $\underline{\underline{S}}(t)$. Ce dernier est défini par :

$$\underline{\underline{S}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) - \mathcal{P}(t)\underline{\underline{\mathbb{1}}} \qquad (I.3.14)$$

où $\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ est le tenseur unité d'ordre deux et $\mathcal{P}(t)$ la pression hydrostatique , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \underline{\underline{\Sigma}}(t) \qquad (I.3.15)$$

Le second invariant $\mathcal{J}_2(t)$ du tenseur $\underline{\underline{S}}(t)$ est donc :

$$\mathcal{J}_2(t) = \frac{1}{2} \underline{\underline{S}}(t) : \underline{\underline{S}}(t) \qquad (1.3.16)$$

L'ensemble des déviateurs constitue un sous-espace vectoriel des tenseurs et sa représentation, dans l'espace des contraintes, est l'hyperplan dont la normale est le tenseur unité d'ordre deux. Lors d'un chargement périodique, le point représentatif du tenseur $\underline{\underline{S}}(t)$ décrit une courbe fermée Φ' dans ce sous-espace. Φ' est aussi la projection orthogonale de la courbe Φ parcourue par le

point représentatif de $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$. Le diamètre D de cette courbe Φ' est donnée par :

$$D = \max_{t_\circ \in T} \left\{ \max_{t \in T} \left[(\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{S}}(t_\circ)) : (\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{S}}(t_\circ)) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \qquad (I.3.17)$$

<u>L'amplitude de $\sqrt{\vartheta_2(t)}$</u>, notée τ_a, est définie comme étant le demi-diamètre de la courbe Φ' au facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ près :

$$\tau_a = \frac{1}{2} \frac{D}{\sqrt{2}} \qquad (I.3.18)$$

L'expression "amplitude de $\sqrt{\vartheta_2(t)}$ " est trompeuse car un lecteur non averti pourrait être tenté de calculer τ_a en prenant la demi-différence entre les valeurs extrêmes de $\sqrt{\vartheta_2(t)}$. Sauf dans le cas d'un chargement radial, il obtiendrait un résultat faux. Prenons par exemple, le cas où la courbe Φ' est un cercle de rayon unité centré à l'origine. D'après la définition (I.3.18), τ_a vaut donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En revanche, la demi-différence entre les valeurs extrêmes de $\sqrt{\vartheta_2(t)}$ conduit à zéro puisque, dans ce cas, $\sqrt{\vartheta_2(t)}$ reste constante égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Les définitions de l'amplitude $\mathcal{P}_a$ et de la valeur moyenne $\mathcal{P}_m$ de la pression hydrostatique $\mathcal{P}(t)$ ne présentent pas de difficultés particulières :

$$\mathcal{P}_a = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in T} \mathcal{P}(t) - \min_{t \in T} \mathcal{P}(t) \right\} \qquad (I.3.19)$$

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2}\left\{\max_{t\in T}\mathcal{P}(t) + \min_{t\in T}\mathcal{P}(t)\right\} \qquad (I.3.20)$$

La pression hydrostatique maximale $\mathcal{P}_{max}$ est donc :

$$\mathcal{P}_{max} = \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_m \qquad (I.3.21)$$

Dans le cas d'un chargement affine ou proportionnel, il devient possible de définir le <u>tenseur variation du déviateur des contraintes</u> que nous notons $\Delta\underline{\underline{S}}$:

$$\Delta\underline{\underline{S}} = \Delta\underline{\underline{\Sigma}} - \frac{1}{3}\,(\,\mathrm{tr}\,\Delta\underline{\underline{\Sigma}}\,)\,\underline{\underline{1}} \qquad (I.3.22)$$

L'amplitude de $\sqrt{\vartheta_2(t)}$, définie par l'équation (I.3.18) s'écrit aussi :

$$\tau_a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\,\Delta\underline{\underline{S}} : \Delta\underline{\underline{S}}} \qquad (I.3.23)$$

ou encore en fonction des valeurs principales de $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$,

$(\Delta\Sigma_1 > \Delta\Sigma_2 > \Delta\Sigma_3)$:

$$\tau_a = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}\left[(\Delta\Sigma_1-\Delta\Sigma_2)^2+(\Delta\Sigma_2-\Delta\Sigma_3)^2+(\Delta\Sigma_3-\Delta\Sigma_1)^2\right]\right\}^{1/2} \qquad (I.3.24)$$

L'amplitude de la pression hydrostatique s'écrit plus simplement :

$$\mathcal{P}_a = \frac{1}{6}\,|\,\mathrm{tr}\,\Delta\underline{\underline{\Sigma}}\,| = \frac{1}{6}\,|\,\Delta\Sigma_1+\Delta\Sigma_2+\Delta\Sigma_3\,| \qquad (I.3.25)$$

et sa valeur moyenne :

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{3} \text{ tr } \underline{\underline{\Sigma}}_m = \frac{1}{3} \left(\Sigma_{1,m} + \Sigma_{2,m} + \Sigma_{3,m} \right) \qquad \text{(I.3.26)}$$

Nous attirons à nouveau l'attention du lecteur, sur le calcul des valeurs principales $\Delta\Sigma_1$, $\Delta\Sigma_2$, $\Delta\Sigma_3$ du tenseur variation des contraintes $\Delta\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^A - \underline{\underline{\Sigma}}^B$. Lors d'un chargement affine (non radial), les directions principales du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ varient. $\Delta\Sigma_1$, $\Delta\Sigma_2$, $\Delta\Sigma_3$ ne sont donc pas égales aux différences entre les contraintes principales des tenseurs $\underline{\underline{\Sigma}}^A$ et $\underline{\underline{\Sigma}}^B$. Nous allons donner un exemple pour illustrer ce point. Soit le chargement affine simple défini par :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \Sigma \sin\omega t & T & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(I.3.27)}$$

et dont le trajet, dans l'espace des contraintes est représenté sur la figure I.7.

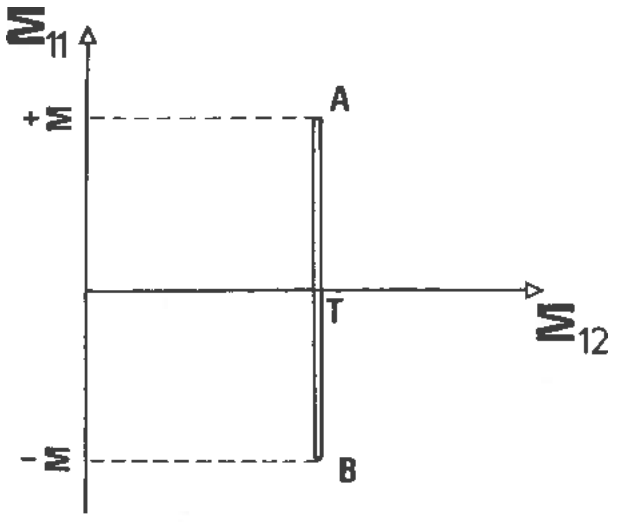


Figure I.7 Exemple d'un chargement affine simple.

Les tenseurs des contraintes extrêmes $\underline{\underline{\Sigma}}^A$ et $\underline{\underline{\Sigma}}^B$ sont :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^A = \begin{bmatrix} \Sigma & T & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\underline{\Sigma}}^B = \begin{bmatrix} -\Sigma & T & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(I.3.28)}$$

avec, pour valeurs principales :

$$\Sigma_1^A = \frac{\Sigma}{2} + \sqrt{\frac{\Sigma^2}{4} + T^2} \ , \ \Sigma_2^A = 0 \ , \ \Sigma_3^A = \frac{\Sigma}{2} - \sqrt{\frac{\Sigma^2}{4} + T^2} \qquad \text{(I.3.29)}$$

et

$$\Sigma_1^B = -\frac{\Sigma}{2} + \sqrt{\frac{\Sigma^2}{4} + T^2} \ , \ \Sigma_2^B = 0 \ , \ \Sigma_3^B = -\frac{\Sigma}{2} - \sqrt{\frac{\Sigma^2}{4} + T^2} \qquad \text{(I.3.30)}$$

D'autre part, le tenseur variation des contraintes donné par :

$$\Delta\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^A - \underline{\underline{\Sigma}}^B = \begin{bmatrix} 2\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(I.3.31)}$$

admet pour valeurs principales :

$$\Delta\Sigma_1 = 2\Sigma \quad , \quad \Delta\Sigma_2 = \Delta\Sigma_3 = 0 \qquad \text{(I.3.32)}$$

Pour cet exemple, nous remarquons que :

$$\begin{aligned} \Delta\Sigma_1 = 2\Sigma \quad &\neq \quad \Sigma_1^A - \Sigma_1^B = \Sigma \\ \Delta\Sigma_2 = 0 \quad &= \quad \Sigma_2^A - \Sigma_2^B \qquad \text{(I.3.33)} \\ \Delta\Sigma_3 = 0 \quad &\neq \quad \Sigma_3^A - \Sigma_3^B = \Sigma \end{aligned}$$

Dans le cas d'un chargement affine (non radial), il faut donc faire particulièrement attention au calcul des quantités introduites dans ce paragraphe lorsqu'elles sont exprimées en fonction des valeurs principales du tenseur variation des contraintes $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$.

En revanche, lorsque le chargement est radial, les directions principales du tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ étant fixes, les valeurs principales du tenseur variation des contraintes $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ coïncident avec les différences entre les valeurs principales des états extrêmes $\underline{\underline{\Sigma}}^A$ et $\underline{\underline{\Sigma}}^B$. De plus, il est alors possible d'interpréter physiquement les quantités τ_a $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_m$. Le plan octaédrique Π, défini par la normale $\underline{n}$ de composantes $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ dans le repère principal de $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$, est alors fixe et détermine un plan matériel particulier. La contrainte tangentielle à ce plan s'appelle <u>cission octaédrique</u> $\underline{C}_{oct}$ et la contrainte normale <u>tension octaédrique</u> $\underline{N}_{oct}$. Le trajet du chargement dans l'espace des déviateurs coïncide alors avec le segment décrit par la pointe du vecteur $\sqrt{\frac{3}{2}}\,\underline{C}_{oct}$ dans le plan Π d'où l'identité :

$$\tau_a = \sqrt{\frac{3}{2}}\, C_{oct,a} \qquad \text{(I.3.34)}$$

Il est, d'autre part, aisé d'établir les relations suivantes :

$$\mathcal{P}_a = N_{oct,a} \qquad \text{(I.3.35)}$$

et

$$\mathcal{P}_m = N_{oct,m} \qquad (I.3.36)$$

Cette interprétation physique de $\sqrt{\partial_2}$ et $\mathcal{P}$ par l'intermédiaire des vecteurs $\underline{C}_{oct}$ et $\underline{N}_{oct}$ a souvent été utilisée dans la littérature relative aux critères de fatigue traditionnels [16], [27].

Pour clore ce paragraphe, nous signalons que certains auteurs utilisent, dans la formulation de critères de fatigue, les composantes du tenseur $\frac{1}{2}\,\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ alors appelé tenseur des amplitudes des contraintes. Ce vocabulaire n'est pas conforme à la définition (I.2.3) de l'amplitude de chaque composante du tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$, définition qui est universellement adoptée dans la littérature de fatigue uniaxiale.

Cette confusion ainsi que le calcul erroné des valeurs principales de $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$, sont à l'origine d'erreurs commises par certains auteurs dans l'application de différents critères de fatigue.

TABLEAU II

RECAPITULATIF DES DEFINITIONS

GENERALITES	
Vecteur contrainte $\underline{\Sigma}_n$ sur un plan P de normale $\underline{n}$	$\underline{\Sigma}_n = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}$
Cission $\underline{C}$, contrainte tangentielle au plan P de normale $\underline{n}$ Projection orthogonale du vecteur contrainte sur le plan P	$\underline{C}(\underline{n}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} - (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n})\underline{n}$ $\|\underline{C}(\underline{n})\| = \left[\|\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}\|^2 - (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n})^2\right]^{1/2}$
Tension $\underline{N}$, contrainte normale sur le plan P de normale $\underline{n}$	$\underline{N}(\underline{n}) = (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n})\underline{n}$ $\|\underline{N}(\underline{n})\| = \|\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}\|$
Pression hydrostatique $\mathcal{P}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \underline{\underline{\Sigma}}$
Déviateur des contraintes $\underline{\underline{S}}$	$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\Sigma}} - \mathcal{P}\underline{\underline{1}}$
Second invariant du déviateur $\mathcal{J}_2$	$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}}$

TABLEAU II (suite)

CHARGEMENTS PERIODIQUES GENERAUX	
Amplitude de la cission $C_a(\underline{n})$	$C_a(\underline{n}) = \frac{1}{2} \max_{t_\circ \in T} \left\{ \max_{t \in T} \left[\| (\underline{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\underline{\Sigma}}(t_\circ)) \cdot \underline{n} \|^2 - [\, \underline{n} \cdot (\underline{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\underline{\Sigma}}(t_\circ)) \cdot \underline{n} \,]^2 \right]^{1/2} \right\}$
Amplitude de la tension $N_a(\underline{n})$	$N_a(\underline{n}) = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in T} (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(t) \cdot \underline{n}) - \min_{t \in T} (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(t) \cdot \underline{n}) \right\}$
Valeur moyenne de la tension $N_m(\underline{n})$	$N_m(\underline{n}) = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in T} (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(t) \cdot \underline{n}) + \min_{t \in T} (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(t) \cdot \underline{n}) \right\}$

Amplitude de $\sqrt{\vartheta_2(t)}$, notée τ_a	$\tau_a = \frac{1}{2} \max_{t_\circ \in T} \left\{ \max_{t \in T} \left[\frac{1}{2} (\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{S}}(t_\circ)) : (\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{S}}(t_\circ)) \right]^{1/2} \right\}$
Amplitude de la pression hydrostatique $\mathcal{P}_a$	$\mathcal{P}_a = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in T} \mathcal{P}(t) - \min_{t \in T} \mathcal{P}(t) \right\}$
Valeur moyenne de la pression hydrostatique $\mathcal{P}_m$	$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in T} \mathcal{P}(t) + \min_{t \in T} \mathcal{P}(t) \right\}$

TABLEAU II (suite)

CHARGEMENTS PERIODIQUES AFFINES ET PROPORTIONNELS	
Tenseur variation des contraintes $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$	$\Delta\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^A - \underline{\underline{\Sigma}}^B$ $\underline{\underline{\Sigma}}^A, \underline{\underline{\Sigma}}^B$ sont les états de contraintes extremes.
Tenseur de l'état moyen des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}_m$	$\underline{\underline{\Sigma}}_m = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\Sigma}}^A + \underline{\underline{\Sigma}}^B\right)$
Amplitude de la cission $C_a(\underline{n})$	$C_a(\underline{n}) = \frac{1}{2}\left[\|\Delta\underline{\underline{\Sigma}}\cdot\underline{n}\|^2 - (\underline{n}\cdot\Delta\underline{\underline{\Sigma}}\cdot\underline{n})^2\right]^{1/2}$
Amplitude de la tension $N_a(\underline{n})$	$N_a(\underline{n}) = \frac{1}{2}\,\lvert\,\underline{n}\cdot\Delta\underline{\underline{\Sigma}}\cdot\underline{n}\,\rvert$
Valeur moyenne de la tension $N_m(\underline{n})$	$N_m(\underline{n}) = \underline{n}\cdot\underline{\underline{\Sigma}}_m\cdot\underline{n}$

Amplitude de $\sqrt{\vartheta_2(t)}$, notée τ_a	$\tau_a = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\Delta\underline{\underline{S}} : \Delta\underline{\underline{S}}\right]^{1/2}$
Amplitude de la pression hydrostatique $\mathcal{P}_a$	$\mathcal{P}_a = \frac{1}{6}\,\lvert\,\mathrm{tr}\,\Delta\underline{\underline{\Sigma}}\,\rvert$
Valeur moyenne de la pression hydrostatique $\mathcal{P}_m$	$\mathcal{P}_m = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\Sigma}}_m$

CHAPITRE II

CRITERES DE FATIGUE TRADITIONNELS

II-1 CLASSEMENT DES CRITERES

Le nombre de critères de fatigue existant dans la littérature étant important, nous proposons ici d'en donner un classement afin d'en faciliter l'analyse. Nous distinguons trois groupes.

Certains critères ont été formulés de façon empirique à partir des résultats expérimentaux. Nous les appellerons critères de fatigue empiriques.

D'autres admettent comme paramètre principal une contrainte de cisaillement (cission, voir § I.3). Sous chargement statique, le critère de la contrainte de cisaillement maximale est connu sous le nom de critère d'élasticité de Tresca. Nous conviendrons donc de regrouper ces critères sous le vocable critères de fatigue issus du critère de Tresca. Bien entendu, il ne s'agit ici que d'une simple convention puisque l'analogie reste purement formelle.

Le troisième groupe est constitué des critères de fatigue exprimés en fonction de la racine carrée du second invariant du déviateur des contraintes (voir § I.3). Une telle formulation rappelle naturellement le critère d'élasticité de von Mises pour un chargement statique. Par convention, nous parlerons alors de critères de fatigue issus du critère de von Mises. Encore une fois, cette dénomination ne traduit qu'une analogie formelle.

II-2 CRITERES EMPIRIQUES

Etablir un critère de fatigue empirique consiste à déterminer la surface d'endurance. Pour des trajets de chargement périodiques affines, définis à partir d'un état de contraintes moyen fixé, la surface d'endurance est l'ensemble des limites d'endurance dans les différentes directions de l'espace des contraintes (voir Fig. II.1).

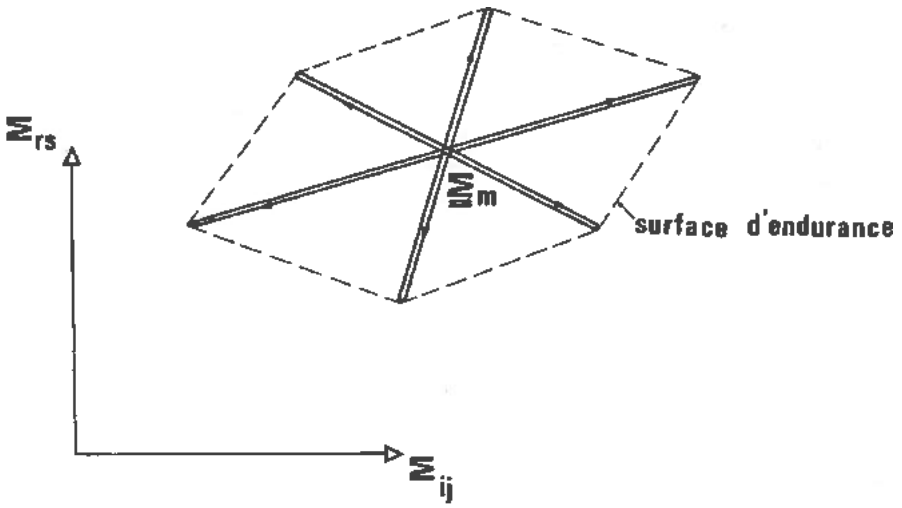


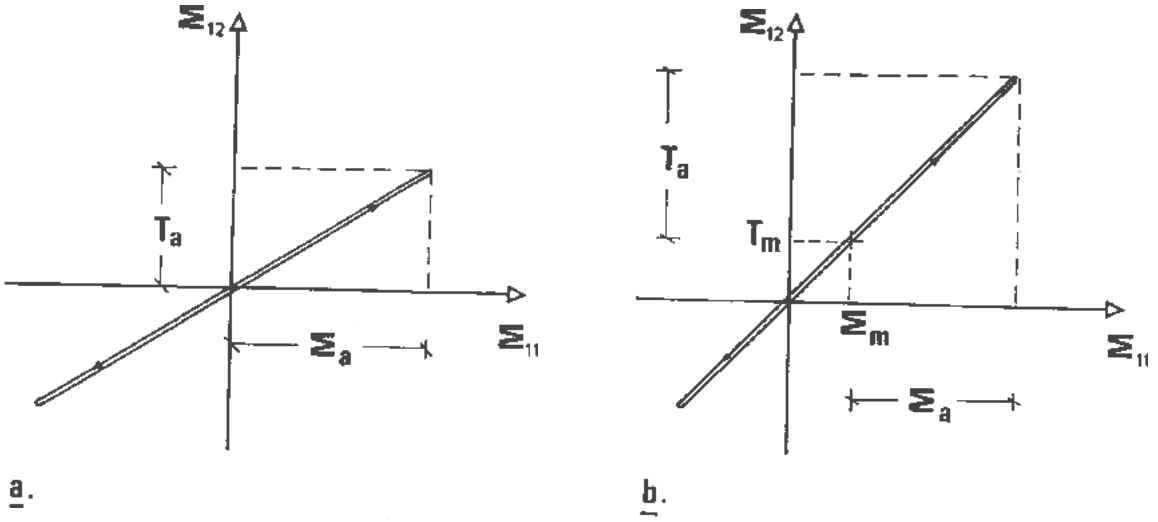
Figure II.1 Définition expérimentale d'une surface d'endurance.

En pratique, cette méthode d'élaboration d'un critère de fatigue empirique n'a été appliquée qu'à des chargements à deux paramètres (par exemple : flexion-torsion).

II.2.1 CRITERES DE GOUGH ET POLLARD

Bien que certaines études en fatigue multiaxiale datent des années 1900 et même antérieures, la première exploitation systématique des résultats expérimentaux dans le but d'élaborer un critère de fatigue, appartient à Gough et Pollard, dont les travaux ont été publiés pour la première fois en 1935. Gough et Pollard ont effectué un très vaste programme d'expériences en flexion-torsion alternée [28] (Fig. II.2.a)

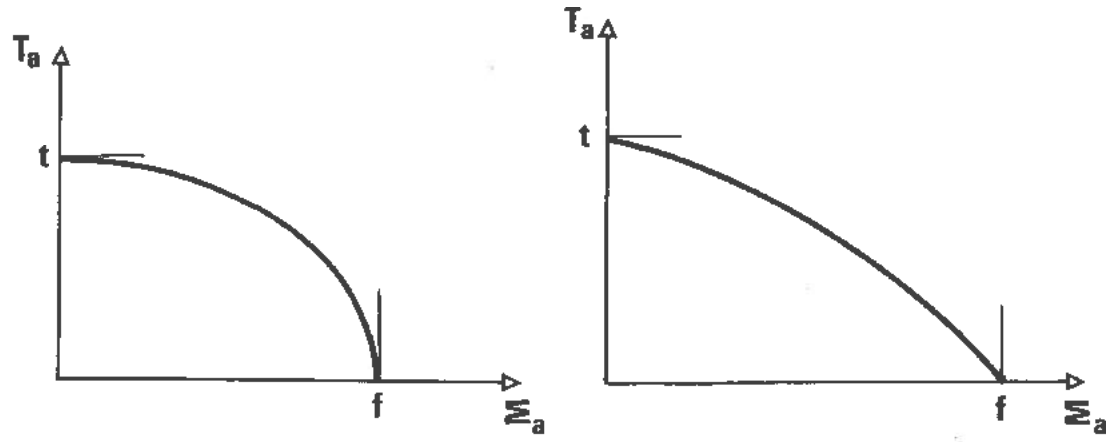
Avec la participation de Clenshaw, ce programme a ensuite été complété par des expériences en flexion-torsion proportionnelles autour d'un état de contraintes moyen donné [29] (Fig. II.2.b).



a. b.

Figure II.2 Trajets de charge des expériences de Gough et al. [28], [29].

Plusieurs métaux ont été testés. Ils ont été classés en deux catégories, métaux ductiles et métaux fragiles. Deux courbes d'endurance ont été proposées dans le quart de plan, amplitude de la contrainte due à la flexion (Σ_a), amplitude de la contrainte due à la torsion (T_a), Σ_a et T_a étant des grandeurs positives par définition (Fig. II.3).



a. quadrant de l'ellipse

b. arc de l'ellipse

Figure II.3 Critères de Gough et Pollard.

Pour les métaux ductiles, les courbe d'endurance coïncide avec le premier quadrant de l'ellipse (Fig. II.3.a), d'équation :

$$\frac{T_a^2}{t^2} + \frac{\Sigma_a^2}{f^2} = 1 \qquad \text{(II.2.1)}$$

Pour les métaux fragiles, la courbe d'endurance est donnée par l'arc de l'ellipse (Fig. II.3.b), d'équation :

$$\frac{T_a^2}{t^2} + \left(\frac{f}{t} - 1\right)\frac{\Sigma_a^2}{f^2} + \left(2 - \frac{f}{t}\right)\frac{\Sigma_a}{f} = 1 \qquad \text{(II.2.2)}$$

Dans ces deux dernières expressions, t et f sont les limites d'endurance en torsion alternée et flexion alternée respectivement. Rremarquons que les deux courbes d'endurance coïncident pour $\frac{f}{t} = 2$.

Bien qu'initialement, les formules (II.2.1) et (II.2.2) aient été proposées exclusivement pour des essais en flexion-torsion alternée, il s'est avéré plus tard [29], que le quadrant de l'ellipse représentait de façon satisfaisante les résultats expérimentaux en flexion-torsion proportionnelle autour d'un état des contraintes moyen (Fig. II.2.b). C'est pourquoi le quadrant de l'ellipse a été proposé par Gough et al. [29] comme un critère raisonnable pour les métaux ductiles sollicités en flexion-torsion à trajet radial alterné ou même asymétrique.

En analysant les résultats d'autres auteurs (**Ono, A.** "Fatigue of Steel Under Combined Bending and Torsion, Kyushu Imper. Univ., Memoirs Eng. Coll., Vol. II, n°2, 1921) et (**Lea and Budgeon,** "Combined Torsional and Repeated Bending Stresses, Engineering, Vol. 122, p. 242, 1926), **Gough et Pollard** ont également conclus que l'influence d'une torsion statique superposée à une flexion alternée est négligeable du point de vue de la résistance en fatigue.

Enfin, il est intéressant de noter que les critères de Gough et Pollard ont souvent été utilisés pour interpréter des résultats expérimentaux en flexion-torsion à trajet de charge affine sans qu'aucune exploitation systématique n'ait été faite dans ce sens.

II.2.2 CRITERES DE NISHIHARA-KAWAMOTO

A la suite d'expériences en flexion-torsion réalisées sur neuf métaux, Nishihara et Kawamoto [58], ont proposé deux critères de fatigue empiriques suivant la valeur du rapport $\frac{f}{t}$. Pour $\frac{f}{t} \geqslant \sqrt{3}$, il s'agit d'une équation identique à celle du quadrant de l'ellipse de Gough et Pollard (équation II.2.1) alors que, pour $\frac{f}{t} \leqslant \sqrt{3}$, l'expression :

$$\frac{T_a^2}{t^2} + \frac{1}{2}\left[3-\left(\frac{f}{t}\right)^2\right]\frac{\Sigma_a}{f} + \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{f}{t}\right)^2\right]\frac{\Sigma_a^2}{f^2} \leqslant 1 \qquad \text{(II.2.3)}$$

représentait mieux les résultats expérimentaux obtenus.

II.2.3 FORMULE DE DAVIES

Cet auteur a effectué un nombre relativement restreint d'expériences en flexion-torsion. Le trajet de chargement était affine. Plus précisément, il s'agissait d'une flexion alternée, superposée à une torsion statique.

A l'issue de ses expériences, Davies a proposé la relation suivante [14] :

$$\frac{\Sigma_a^2}{f^2} + \frac{T_m}{t_u} \leqslant 1 \qquad \text{(II.2.4)}$$

où Σ_a est l'amplitude de la contrainte due à la flexion, f la limite d'endurance en flexion alternée, T_m la contrainte due à la torsion statique et t_u la contrainte de cisaillement ultime (à la rupture) sous charge monotone de torsion. Remarquons que la formule de Davies contredit les conclusions de Gough et al. (voir § II.2.1).

II.2.4 FORMULE DE HOHENEMSER ET PRAGER

Ces auteurs ont étudié l'influence d'une traction statique superposée à une torsion alternée. Il s'agit d'un chargement à trajet affine. Pour le métal étudié, les auteurs ont noté une influence prononcée de la traction statique sur la limite d'endurance en torsion, ce qui les a amené à proposer la relation suivante [36] :

$$\frac{T_a^2}{t^2} + \frac{\Sigma_m}{\sigma_u} \leqslant 1 \qquad \text{(II.2.5)}$$

σ_u étant la contrainte ultime en traction monotone.

II.2.5 REMARQUES SUR LES CRITERES DE FATIGUE EMPIRIQUES

Bien que les critères empiriques aient été et soient encore fréquemment utilisés notamment dans l'industrie, leur domaine de validité est restreint. Il est fondamental de souligner que chaque critère n'est à priori valable que pour des systèmes de contraintes identiques à ceux utilisés dans les expériences qui ont permis l'élaboration dudit critère.

D'autre part, cette recherche empirique de la surface d'endurance sans autre considération d'ordre théorique, est compromettante car elle aboutit à des formulations qui dépendent des coordonnées choisies.

Néanmoins, les observations qualitatives faites par les différents auteurs, notamment Gough et al. [29], sont d'une très grande utilité. Nous les rappelons brièvement ci-après :

i - Dans les expériences en flexion-torsion à trajet de charge radial, l'influence de l'état moyen des contraintes est faible.

ii - L'influence, sur la limite d'endurance en flexion alternée, d'une torsion statique superposée est négligeable.

iii - En revanche, l'influence d'une contrainte de traction statique sur la limite d'endurance en torsion alternée, est importante. Cette dernière décroît pour une contrainte de traction statique croissante.

Pour terminer, nous présentons quelques critères empiriques de fatigue uniaxiale établis dans le but de prendre en compte l'influence d'une contrainte moyenne de même nature sur la limite d'endurance :

- La droite de Soderberg :

$$\frac{\Sigma_a}{d} + \frac{\Sigma_m}{\sigma_y} = 1 \qquad \text{(II.2.6)}$$

- La droite de Goodmann :

$$\frac{\Sigma_a}{d} + \frac{\Sigma_m}{\sigma_u} = 1 \qquad \text{(II.2.7)}$$

- Le diagramme de Haigh :

$$\frac{\Sigma_a}{d} + \left(\frac{\sigma_u}{d} - 2 \right) \frac{\Sigma_m}{d} = 1 \ , \quad \frac{\Sigma_a}{d} \leqslant 1 \qquad \text{(II.2.8)}$$

- La parabole de Gerber :

$$\left(\frac{\Sigma_a}{d} \right)^2 + \frac{\Sigma_m}{\sigma_u} = 1 \qquad \text{(II.2.9)}$$

- L'ellipse de Marin :

$$\left(\frac{\Sigma_a}{d} \right)^2 + \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 = 1 \qquad \text{(II.2.10)}$$

Toutes ces relations ont été proposées pour le cas de la traction-compression. σ_y et σ_u y représentent respectivement la limite d'élasticité et la limite de rupture statique en traction. d est la limite d'endurance en traction-compression alternée. $\Sigma_a$est l'amplitude limite en présence d'une contrainte moyenne Σ_m. Dans le cas de la torsion, la tendance générale des résultats expérimentaux montre que la limite d'endurance en torsion n'est pratiquement pas influencée par la présence d'une torsion moyenne.

II-3 CRITERES DE FATIGUE ISSUS DU CRITERE DE TRESCA

Les critères de ce groupe reposent sur une base physique commune : l'observation expérimentale du premier stade de développement d'une fissure de fatigue, appelé **stade I de propagation** depuis les travaux de Forsyth [25].

Une fissure de fatigue, une fois amorçée, se propage initialement dans un plan de cisaillement (Fig. II.4). C'est ce que l'on appelle le **stade I de propagation** [25]. Après avoir atteint une certaine longueur, la fissure dévie et se propage alors dans un plan perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale de traction (Fig. II.4). Cette seconde phase s'appelle **stade II de propagation** [25].

L'évolution de la fissure au cours du stade II constitue un des objets de recherche de la Mécanique de la Rupture (par exemple : loi de Paris).

Puisque durant le stade I, la propagation s'effectue dans un plan de cisaillement, plusieurs auteurs en ont conclu que le paramètre mécanique qui gouverne l'amorçage d'une fissure est la contrainte de cisaillement (cission, voir § I.3). Il est néanmoins reconnu que la contrainte normale sur le plan de cisaillement (tension, voir § I.3) a

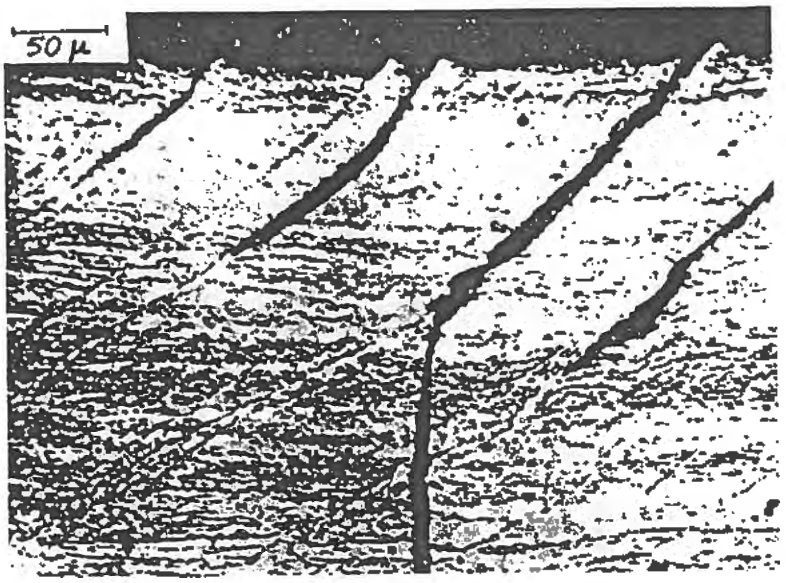


Figure II.4 Mise en évidence des deux stades de propagation d'une fissure de fatigue (d'après [25]).

aussi une influence sur l'amorçage d'une fissure de fatigue.

Ainsi est-il naturel de choisir comme paramètre une combinaison des contraintes normale et de cisaillement sur un même plan (contrainte équivalente). Le critère s'exprime alors par une limitation de cette contrainte équivalente sur le plan de propagation du stade I.

Les critères présentés ci-après sont tous de ce type mais ils se différencient sur deux points :

i - La définition de la contrainte équivalente.

ii - Le choix du plan de propagation du stade I, appelé plan de cisaillement critique.

Précisons dès maintenant que ce plan critique peut être différent des plans de cisaillement maximal et de contrainte équivalente maximale.

Les notations utilisées dans la suite sont celles présentées dans le paragraphe I.3.

II.3.1 CRITERE DE STULEN-CUMMINGS

Le critère proposé par Stulen-Cummings [71] s'écrit :

$$\frac{C_a\left(\underline{n}^*\right)}{b - a\, N_{max}\left(\underline{n}^*\right)} \leqslant 1 \qquad \text{(II.3.1)}$$

où a et b sont des constantes caractéristiques du matériau. Le plan critique P_c de la normale $\underline{n}^*$ est celui de la contrainte équivalente maximale, c'est-à-dire :

$$P_c : \max_{\underline{n}} \left[\frac{C_a(\underline{n})}{b - a\, N_{max}(\underline{n})} \right] \qquad \text{(II.3.2)}$$

La contrainte équivalente est ici normalisée : sa valeur doit être limitée à l'unité pour qu'il n'y ait pas amorçage d'une fissure de fatigue. Le critère formulé ainsi, joint

aux définitions de C_a, N_{max} pour un chargement périodique général (voir § I.3), est valable pour tout type de sollicitation périodique. Néanmoins, Stulen et Cummings ne l'ont appliqué qu'au cas des chargements radiaux alternés pour un état biaxial des contraintres [71]. La recherche du plan critique par la relation (II.3.2) conduit alors à la solution :

$$n_1^*=\left[\frac{2b-a\Delta\Sigma_3}{2b-a\dfrac{\Delta\Sigma_1+\Delta\Sigma_3}{2}}\right]^{1/2},\quad n_2^*=0\ ,\quad n_3^*=\left[\frac{-a\dfrac{\Delta\Sigma_1-\Delta\Sigma_3}{2}}{2b-a\dfrac{\Delta\Sigma_1+\Delta\Sigma_3}{2}}\right]^{1/2} \qquad \text{(II.3.3)}$$

$\underline{n}^*$ est ici exprimé dans le repère principal de $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$. Notons que ce dernier coïncide à tout instant avec le repère principal du tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$, pour ce type de chargement. Rappelons que l'ordre dans lequel les états extrêmes $\underline{\underline{\Sigma}}^A$, $\underline{\underline{\Sigma}}^B$ sont pris pour la définition de $\Delta\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^A - \underline{\underline{\Sigma}}^B$ n'a pas d'influence sur les grandeurs intervenant dans le critère (équation II.3.1). On choisit donc celui pour lequel $\Delta\Sigma_1$ est positif. L'état de contrainte étant biaxial, deux configurations sont alors possibles pour $\Delta\Sigma_3$: soit elle est strictement négative ($\Delta\Sigma_2 = 0$) , soit elle est nulle ($\Delta\Sigma_1 \geqslant \Delta\Sigma_2 > 0$) . Dans le premier cas, le report des relations (II.3.3) dans l'expression (II.3.1) conduit au critère :

$$\frac{\Delta\Sigma_1}{2} - \frac{1}{\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)^2}\,\frac{\Delta\Sigma_3}{2} \leqslant 2b\left(-a+\sqrt{1+a^2}\right) \qquad \text{(II.3.4)}$$

Dans le second cas, il suffit d'annuler $\Delta\Sigma_3$ dans l'expression (II.3.4) pour obtenir :

$$\frac{\Delta\Sigma_1}{2} \leqslant 2b\left(-a + \sqrt{1 + a^2}\right) \qquad \text{(II.3.5)}$$

Les inégalités (II.3.4) et (II.3.5) peuvent être regroupées sous la forme :

$$\frac{\Delta\Sigma_1}{2} - p\,\frac{\Delta\Sigma_3}{2} \leqslant q \qquad \text{(II.3.6)}$$

avec

$$p = \frac{1}{\left(a + \sqrt{1+a^2}\right)^2} \quad \text{et} \quad q = 2b\left(-a + \sqrt{1+a^2}\right) \qquad \text{(II.3.7)}$$

Dans la littérature, c'est la relation (II.3.6) qui est connue sous le nom de critère de Stulen-Cummings. La constante q peut être identifiée par un essai en traction-compression alternée. Dans ce cas $\Delta\Sigma_3 = 0$ et la relation (II.3.6) devient :

$$\frac{\Delta\Sigma_1}{2} \leqslant q \Rightarrow q = d \qquad \text{(II.3.8)}$$

où d est la limite d'endurance en traction-compression alternée. La valeur de la constante p peut ensuite être mesurée sur un essai en torsion alternée. Puisqu'alors $\Delta\Sigma_1 = -\Delta\Sigma_3$, le critère (II.3.6) conduit à l'inégalité :

$$\frac{\Delta\Sigma_1}{2} - p\,\frac{(-\Delta\Sigma_1)}{2} \leqslant d \Rightarrow p = \frac{d}{t} - 1 \qquad \text{(II.3.9)}$$

où t est la limite d'endurance en torsion alternée. La définition (II.3.7) des constantes p et q nous permet alors

d'exprimer les constantes a et b du critère (II.3.1) en fonction de t et d :

$$a = \frac{\frac{d}{t} - 2}{2\sqrt{\frac{d}{t} - 1}} \quad \text{et} \quad b = \frac{d}{2\sqrt{\frac{d}{t} - 1}} \qquad \text{(II.3.10)}$$

Il est important de noter que le critère (II.3.6) ne constitue qu'un cas particulier du critère (II.3.1). Ils ne sont pas équivalents. Le critère (II.3.6) connu comme critère de Stulen-Cummings n'est valable que pour des chargements biaxiaux alternés à trajet radial. Dorénavant, nous parlerons du critère général de Stulen-Cummings (équation II.3.1) et du critère restreint de Stulen-Cummings (équation II.3.6).

Le critère restreint peut être appliqué au cas de la flexion-torsion alternée à trajet radial. On obtient :

$$\Delta\Sigma_{1,3} = \Sigma_a \pm 2\sqrt{\frac{\Sigma_a^2}{4} + T_a^2} \quad , \quad \Delta\Sigma_2 = 0 \qquad \text{(II.3.11)}$$

Pour ces valeurs et en utilisant les équations (II.3.8,9), l'expression (II.3.6) devient :

$$\frac{T_a^2}{t^2} + \left(\frac{d}{t} - 1\right)\frac{\Sigma_a^2}{d^2} + \left(2 - \frac{d}{t}\right)\frac{\Sigma_a}{d} \leqslant 1 \qquad \text{(II.3.12)}$$

Il s'agit de l'arc de l'ellipse de Gough-Pollard (équation II.1.2) si les limites d'endurance en flexion alternée f et en traction- compression alternée d prennent la même valeur. Les deux critères sont strictement équivalents pour

le cas de charge considéré si la constante q du critère restreint de Stulen-Cummings est identifiée par un essai en flexion alternée. Néanmoins, il a été prouvé expérimentalement que les limites d'endurance en flexion et en traction-compression alternées différaient de manière significative pour la plupart des métaux. En général, cette différence est attribuée au gradient des contraintes inhérent à l'essai de flexion mais aucune explication théorique satisfaisante n'a été donnée jusqu'à aujourd'hui.

Enfin, appliqué à un essai de torsion cyclique asymétrique, le critère général de Stulen-Cummings prévoit une influence de la torsion moyenne T_m sur l'amplitude limite T_a, puisqu'on obtient :

$$T_a = \left[b^2 - a^2 \left(T_a + T_m \right)^2 \right]^{3/2} \qquad \text{(II.3.13)}$$

Or, ceci est démenti par les résultats expérimentaux effectués sur une large gamme de métaux [68].

II.3.2 CRITERE DE FINDLEY

A la suite de nombreux travaux expérimentaux en fatigue multiaxiale [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], Findley a examiné différentes formulations du critère de fatigue. Finalement, dans un article de synthèse à caractère théorique [24], il propose le critère suivant :

$$C_a\left(\underline{n}^*\right) + a\, N_{max}\left(\underline{n}^*\right) \leqslant b \qquad \text{(II.3.14)}$$

Selon lui, cette formule réalise le meilleur compromis entre une conception théorique simple et les résultats expérimentaux qu'il a obtenus essentiellement en flexion-torsion à trajet de charge radial. Ce critère paraît identique au critère générale de Stulen-Cummings (équation II.3.1). En réalité, il en différe par le choix du plan critique. Selon Findley, la fissure s'amorce dans le plan P_c de normale $\underline{n}^*$ sur lequel la contrainte équivalente $[C_a(\underline{n})+ a\ N_{max}(\underline{n})]$ est maximale :

$$P_c : \max_{\underline{n}} [C_a(\underline{n})+a\ N_{max}(\underline{n})] \qquad \text{(II.3.15)}$$

Bien que cette formulation, jointe aux définitions de C_a , N_{max} donnée dans le paragraphe I.3, soit tout à fait générale, Findley n'a appliqué ce critère qu'au cas de la flexion-torsion à trajet de charge radial. C'est un indice de la complexité des calculs analytiques sous-jacents. Cette dernière remarque vaut également pour le critère de Stulen-Cummings.

Dans le cas de la flexion-torsion proportionnelle (i.e à trajet de charge radial) les équations (I.3.11, 12 et 13) nous permettent de calculer l'amplitude de la cission $C_a(\underline{n})$ et la valeur maximale de la tension associée $N_{max}(\underline{n})$ sur un plan de normale $\underline{n}$. On obtient :

$$C_a(\underline{n}) = n_1 n_2 \sqrt{\frac{\Delta\Sigma^2}{4} + \Delta T^2} \qquad \text{(II.3.16)}$$

et

$$N_{max}(\underline{n}) = \frac{\Sigma_{max}}{2} + \left(n_1^2 - n_2^2\right) \sqrt{\frac{\Delta\Sigma^2}{4} + \Delta T^2} \qquad \text{(II.3.17)}$$

où Σ et T sont respectivement la contrainte normale due à la flexion et la contrainte de cisaillement due à la torsion et $\Delta\Sigma$, ΔT , Σ_{max} , T_{max} les variations et valeurs maximales correspondantes. Le vecteur $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est exprimé dans le repère principal de $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$, fixe. Dans la définition (II.3.15), le report des équations (II.3.16 et 17) permet de trouver la normale $\underline{n}^*$au plan critique P_c :

$$n_{1,2}^* = \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\Sigma^2}{4} + \Delta T^2\right)^{1/2}}{\left[a^2\left(\frac{\Sigma_{max}^2}{4} + T_{max}^2\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\Sigma^2}{4} + \Delta T^2\right)\right]^{1/2}} \right\}^{1/2} , \quad n_3^* = 0 \qquad \text{(II.3.18)}$$

Le critère général de Findley (équation II.3.14) prend alors la forme :

$$\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\Sigma^2}{4} + \Delta T^2\right) + a^2\left(\frac{\Sigma_{max}^2}{4} + T_{max}^2\right)\right]^{1/2} + a\,\frac{\Sigma_{max}}{2} \leqslant b \qquad \text{(II.3.19)}$$

qui sera désormais appelée critère restreint de Findley. Les constantes a et b peuvent être identifiées par des essais uniaxiaux. Pour une torsion alternée l'équation (II.3.19) s'écrit :

$$\frac{\Delta T}{2}\sqrt{1+a^2} \leqslant b \;\Rightarrow\; t\sqrt{1+a^2} = b \qquad \text{(II.3.20)}$$

où t est la limite d'endurance correspondante. L'essai en flexion alternée donne,

$$\frac{\Delta\Sigma}{4}\left(\sqrt{1+a^2}+a\right) \leq b \Rightarrow \frac{f}{2}\left(\sqrt{1+a^2}+a\right)=b \qquad \text{(II.3.21)}$$

où f est la limite d'endurance correspondante. La résolution du système d'équations (II.3.20) et (II.3.21) en fonction de a et b nous permet d'identifier ces constantes

$$a = \frac{\frac{2t}{f}-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{f}-1\right)^2}} \quad , \quad b = \frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{f}-1\right)^2}} \qquad \text{(II.3.22)}$$

Il est intéressant de noter que, pour le cas d'une torsion cyclique asymétrique, le critère de Findley prévoit une influence de la torsion moyenne T_m sur l'amplitude limite de la torsion T_a ; cette influence se traduit par l'équation :

$$T_a = \left[b^2 - a^2(T_a+T_m)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II.3.23)}$$

Encore une fois, ceci est en désaccord avec la tendance générale des résultats expérimentaux [68].

Notons finalement qu'un critère de fatigue, identique au critère général de Findley (équation II.3.14), a été indépendamment proposé par Yokobori [73], [74], [75], [76]. Dans l'approche de Yokobori un effort particulier, pour relier les constantes a et b du critère à la microstructure du métal, a été fait. Selon Yokobori les constantes a et b sont fonctions de huit paramètres décrivant la structure du métal à l'échelle du grain.

II.3.3 CRITERE DE MATAKE

Le critère de Matake [50], [51] à l'image des deux critères précédents, se traduit par la limitation

$$C_a\left(\underline{n}^*\right) + a\, N_{max}\left(\underline{n}^*\right) \leqslant b \qquad \text{(II.3.24)}$$

mais le plan critique P_c est choisi différement. Selon Matake, une fissure s'amorce dans le plan P_c de normale $\underline{n}^*$, sur lequel le module de la cission $\|\underline{C}(\underline{n},t)\|$ (cf. équation I.3.5) atteint sa valeur maximale au cours d'un cycle de contraintes. On écrira :

$$P_c : \max_{\underline{n},t} \| \underline{C}\ (\underline{n},t) \| \qquad \text{(II.3.25)}$$

Ainsi formulé, ce critère peut être appliqué à tout type de chargement périodique. Cependant seul le cas de la flexion-torsion alternée a été examiné. Dans ce cas, le critère de Matake coïncide avec l'arc d'ellipse de Gough-Pollard (équation II.2.2). Les constantes a et b peuvent être exprimées en fonction des limites d'endurance en torsion et flexion alternées :

$$a = \frac{t - \frac{f}{2}}{\frac{f}{2}} \quad , \quad b = t \qquad \text{(II.3.26)}$$

Il faut souligner que le critère de Matake présente une différence essentielle avec les deux critères précédents. Dans les approches de Stulen-Cummings et de Findley, la limitation porte sur le maximum d'une

contrainte équivalente calculée sur tous les plans de l'espace. Dans l'approche de Matake, la limitation porte sur la contrainte équivalente associée à un plan particulier qui est celui de la cission maximale (voir équation II.3.25). Il est alors possible que la contrainte équivalente excède sa valeur limite sur d'autres plans, sans qu'il y ait rupture par fatigue selon Matake. Considérons à titre d'exemple, le cas de la torsion répétée ($\Sigma_{xy}(t) = T(t) = T_a \sin\omega t + T_a$) . Le plan de la cission maximale est incliné à 45° par rapport aux directions principales fixes (Fig. II.5).

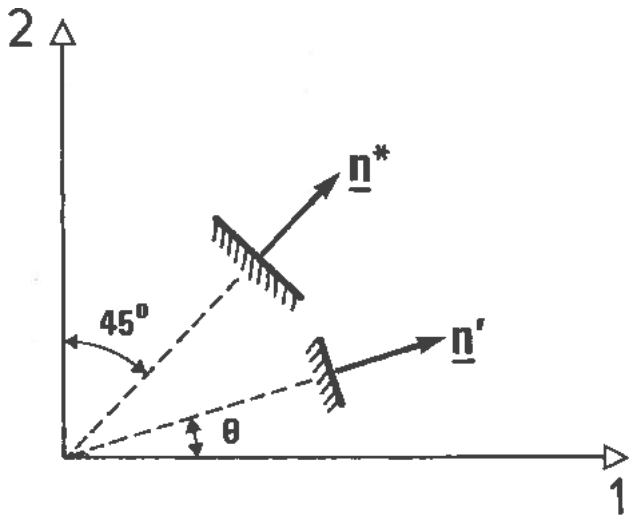


Figure II.5 Plans de la cission maximale (45°) et de la contrainte équivalente maximale (θ) pour la torsion repétée.

La valeur prise par la contrainte équivalente sur ce plan est égale à T_a. Selon Matake, le cas limite de non amorçage

est obtenu par $T_a = b$. Cependant, la contrainte équivalente est maximale sur le plan incliné d'un angle θ défini par $tg2\theta = \frac{1}{a}$ (Fig. II.5) ; elle vaut alors $T_a\sqrt{1+2a^2} > b$.

Le critère de Matake nous conduit donc au paradoxe selon lequel une structure résiste en fatigue bien que la contrainte équivalente excède sa valeur limite sur certains plans. Cela sous-entend que le matériau résiste mieux dans certaines directions que dans d'autres, ce qui contredit l'hypothèse d'isotropie. D'ailleurs l'anisotropie du matériau ne constituerait pas une explication valable puisque les plans privilégiés sont liés au chargement.

II.3.4 CRITERE DE Mc DIARMID

En fatigue multiaxiale, Mc Diarmid a accompli un travail important, tant expérimental que théorique. Ses travaux [52], [53], [55], constituent une tentative de synthèse, dans un cadre phénoménologique, des approches empiriques et des observations expérimentales qui sont à l'origine des critères de fatigue issus du critère de Tresca.

Selon Mc Diarmid, le plan critique P_c est le plan où C_a, l'amplitude de la cission est maximale :

$$P_c : \max_{\underline{n}} C_a(\underline{n}) \qquad \text{(II.3.27)}$$

Ensuite, cet auteur choisit un critère de fatigue proche du quadrant de l'ellipse de Gough-Pollard (équation II.1.1) exprimé en fonction de l'amplitude maximale de la cission C_a et de l'amplitude de la tension associée N_a et qui s'écrirait :

$$C_a = A - B\, N_a^j \qquad \text{(II.3.28)}$$

Mc Diarmid a constaté que la valeur $j = \frac{3}{2}$ correspondait mieux à l'ensemble des résultats expérimentaux de Gough et al. [29] et de Nishihara-Kawamoto [58]. Il propose donc le critère suivant :

$$C_a^{(o)} = t - \left[\frac{t - \frac{f}{2}}{\left(\frac{f}{2}\right)^{3/2}} \right] N_a^{3/2} \qquad \text{(II.3.29)}$$

Il s'agit de l'équation (II.3.28) où les constantes A et B ont été calculées à partir des essais en torsion et flexion alternée respectivement. $C_a^{(o)}$ représente l'amplitude limite de la cission pour un chargement où l'état moyen des contraintes est nul.

Puis Mc Diarmid se propose de prolonger le critère aux cas où l'état moyen des contraintes n'est pas nul. Pour cela, il s'appuie sur les deux constatations expérimentales suivantes :

- Une torsion statique, superposée à un chargement alterné, a une influence négligeable sur la résistance de la fatigue.

- Une traction statique, elle, abaisse sensiblement cette résistance.

Au vu de la première remarque, Mc Diarmid admet que la cission moyenne C_m calculée sur le plan critique P_c n'intervient pas. En revanche, il suppose que la tension moyenne N_m , associée au même plan P_c , conditionne l'amplitude limite $C_a^{(m)}$ de la cission ; pour relier ces deux quantités, il choisit la parabole de Gerber (équation II.2.9), écrite en fonction de $C_a^{(m)}$ et N_m sous la forme

$$C_a^{(m)} = \frac{f}{2} \left(1 - \frac{N_m}{\frac{\sigma_u}{2}} \right)^{1/2} \qquad \text{(II.3.30)}$$

Cette équation s'écrit aussi

$$C_a^{(m)} = C_a^{(o)} \left(1 - \frac{N_m}{\frac{\sigma_u}{2}} \right)^{1/2} \qquad \text{(II.3.31)}$$

En éliminant $C_a^{(o)}$ entre les équations (II.3.29) et (II.3.31), Mc Diarmid obtient le critère suivant :

$$\left[1 - \frac{N_m}{\frac{\sigma_u}{2}} \right]^{-1/2} C_a + \left[\frac{t - \frac{f}{2}}{\left(\frac{f}{2} \right)^{3/2}} \right] N_a^{3/2} \leqslant t \qquad \text{(II.3.32)}$$

où l'indice supérieur (m), qui permettait de distinguer le cas d'un état moyen nul du cas quelconque, est maintenant omis. L'inéquation (II.3.32) jointe aux définitions de C_a,

N_a et N_m pour un chargement périodique général (équations I.3.7, I.3.8 et I.3.9) constitue un critère valable pour tout type de chargement. Mc Diarmid l'a utilisé pour interpréter les essais en flexion-torsion hors phase de Nishihara et Kawamoto [53], [55].

L'originalité de ce critère réside non seulement dans le choix du plan critique mais aussi dans le choix de la contrainte équivalente. Celle-ci a été élaborée en prenant en compte séparément les influences respectives de N_a et N_m sur l'amplitude limite de la cission C_a.

Malgré ses qualités de synthèse des approches empiriques, d'une part, et des considérations physiques liées au stade I de propagation des fissures, d'autre part, le critère de Mc Diarmid présente le même "défaut" que le critère de Matake. En effet, le plan critique P_c ne correspond pas au maximum de la contrainte équivalente :

$$\left[1 - \frac{N_m}{\frac{\sigma_u}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} C_a + \left[\frac{t - \frac{f}{2}}{\left(\frac{f}{2} \right)^{3/2}} \right] N_a^{3/2}$$

Celle-ci peut donc excéder sa valeur limite t sur d'autres plans que le plan critique et nous avons déjà vu que ceci conduisait à une contradiction.

II-4 CRITERES DE FATIGUE ISSUS DU CRITERE DE VON MISES

Contrairement au groupe précédent, les critères issus du critère de von Mises ne sont pas fondés sur une base physique commune. Certains auteurs [49] s'inspirent de l'interprétation énergétique du critère de von Mises pour des charges statiques. D'autres [56], suivent une démarche analogue à celle des critères issus du critère de Tresca, c'est-à-dire supposent que le plan d'initiation d'une fissure de fatigue est le plan octaédrique, sur lequel on sait que la cission est proportionnelle à la mesure de von Mises $\sqrt{J_2}$.

Néanmoins, il semble que le souci principal des auteurs des critères de ce groupe ait été avant tout, la réduction des calculs, parfois laborieux, induits par la formulation des critères du paragraphe précédent.

Dans ce groupe, c'est le choix de la contrainte équivalente qui différencie chaque critère.

II.4.1 CRITERE DE MARIN

C'est une généralisation de l'ellipse de Marin (équation II.2.10) qui est une relation uniaxiale traduisant l'influence d'une contrainte moyenne de traction sur la limite d'endurance en traction-compression asymétrique. Pour un état de contraintes multiaxiale, Marin reprend la même relation en y remplaçant la contrainte de traction par la racine carrée du second invariant ϑ_2 du déviateur des contraintes à un facteur multiplicatif près. Il obtient le critère suivant [49] :

$$\left[\frac{\sqrt{3}\ \sigma_a}{f} \right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}\ \sigma_m}{\sigma_u} \right]^2 \leqslant 1 \qquad \text{(II.4.1)}$$

où σ_a et σ_m sont respectivement l'amplitude et la valeur moyenne de $\sqrt{\vartheta_2(t)}$. Le facteur $\sqrt{3}$ est necessaire pour que ce nouveau critère soit bien un prolongement de l'ellipse (équation II.2.10).

On remarque que ce critère ne fait pas de différence entre un état moyen de traction et un état moyen de compression qui auraient la même valeur absolue. Ceci est en désaccord avec les résultats expérimentaux qui montrent qu'un état moyen de compression augmente la résistance à la fatigue.

II.4.2 CRITERE DE SINES

C'est le critère le plus couramment utilisé en fatigue. Selon Sines, la contrainte équivalente est une combinaison linéaire de τ_a, amplitude de $\sqrt{J_2(t)}$, et de P_m, valeur moyenne de la pression hydrostatique [68], [69], [70] :

$$\tau_a + a P_m \leq b \qquad \text{(II.4.2)}$$

Les grandeurs τ_a et P_m ont été définies antérieurement (équations I.3.18, I.3.20). Les constantes a et b sont identifiables par les essais en torsion alternée et en flexion repétée. Pour le premier cas, $\tau_a = t$ et $P_m = 0$. On obtient

$$b = t \qquad \text{(II.4.3)}$$

Pour le second essai, si f_o désigne la limite d'endurance correspondante ($\Sigma_{xx}(t) = f_o \sin\omega t + f_o$) nous avons $\tau_a = \frac{f_o}{\sqrt{3}}$ et $P_m = \frac{f_o}{3}$ d'où :

$$a = \frac{t - \frac{f_o}{\sqrt{3}}}{\frac{f_o}{3}} \qquad \text{(II.4.4)}$$

L'application du critère de Sines au cas de la flexion alternée ($\Sigma_{xx}(t) = f \sin\omega t$), pour laquelle $\tau_a = \frac{f}{\sqrt{3}}$, $P_m = 0$, conduit au résultat :

$$\frac{f}{\sqrt{3}} = b \Rightarrow \frac{f}{t} = \sqrt{3} \qquad \text{(II.4.5)}$$

Le rapport des limites d'endurance en flexion et en torsion alternées est donc fixé à $\sqrt{3}$ ce qui n'est pas vrai en général. Toutefois, Sines considère que la moyenne statistique du rapport $\frac{f}{t}$ pour les métaux ductiles est proche de $\sqrt{3}$. En revanche, il déconseille l'utilisation de son critère pour les métaux fragiles [68].

Dans le cas d'une flexion-torsion alternée à trajet radial, le critère de Sines conduit à la relation :

$$\frac{\Sigma_a^2}{3t^2} + \frac{T_a^2}{t^2} \leqslant 1 \qquad \text{(II.4.6)}$$

Si, par ailleurs, on tient compte de l'équation (II.4.5), on reconnait ici le quadrant de l'ellipse de Gough-Pollard. Rappelons que Gough et Pollard avaient proposé le quadrant de l'ellipse pour les métaux ductiles, donc $\frac{f}{t} \simeq \sqrt{3}$, en flexion-torsion à trajet de charge radial avec ou sans état moyen des contraintes [29], (voir aussi § II.2.1). Or, dans ce cas, le critère de Sines prévoit une influence de la flexion moyenne contrairement aux constatations expérimentales de Gough et Pollard. En revanche l'influence d'une torsion statique (négligeable) est correctement prise en compte.

Le critère de Sines (équation II.4.2) joint aux définitions de $\mathfrak{T}_a$ et $\mathfrak{P}_m$ (équations I.3.18 et I.3.20) est applicable à tout chargement périodique. Dans un premier temps [68], [69], Sines n'avait formulé son critère que pour des chargements proportionnels, à la suite de quoi Miller et Hull [56] puis Hull [38] en ont proposé une

première généralisation fondée sur l'hypothèse suivante : le plan critique P_c selon lequel une fissure de fatigue est susceptible de s'amorcer est le plan octaédrique à l'instant où $\sqrt{\vartheta_2(t)}$ atteint son maximum :

$$P_c : \max_{t\in T} \sqrt{\vartheta_2(t)} \iff \max_{t\in T} \| \underline{\tau}_{oct}(t) \| \qquad (II.4.7)$$

Sur ce plan P_c de normale $\underline{n}^*$, on appelle $\tau^*_{oct,a}$ l'amplitude de la contrainte tangentielle. La valeur moyenne de la contrainte normale associée est égale à σ_m . Le critère s'énonce alors comme suit :

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\, \tau^*_{oct,a} + a\, \sigma_m \leqslant b \qquad (II.4.8)$$

Pour un chargement proportionnel l'équation (II.4.8) redonne bien le critère de Sines, (équation II.4.2) puisqu'alors $\tau_a = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \tau^*_{oct,a}$ (voir § I.3). Ainsi formulée, la relation (II.4.8) ressemble beaucoup au critère de Matake duquel il se différe que par le choix du plan critique P_c (voir II.3.3). Néanmoins, la justification du choix du plan octaédrique critique donnée par Hull [38] n'est pas claire, d'autant moins que, pour un chargement non-proportionnel, ce plan ne correspond pas au maximum de la contrainte équivalente de Sines ($\tau_a + a\, \sigma_m$). Pour cette raison, la généralisation de Hull présente la même anomalie que les critères de Matake et Mc Diarmid. La seule généralisation correcte du critère de Sines est fondée sur la définition des grandeurs τ_a et σ_m pour un chargement périodique quelconque donnée dans le paragraphe I.3 (équations I.3.18 et 20).

II.4.3 LE CRITERE DE CROSSLAND

Le critère de Crossland a été élaboré à la suite d'un vaste programme expérimental [7], [8], [60], [62], portant sur le comportement en fatigue de l'acier En25T (normes anglaises). Ce programme, complété par les travaux de White et al. [72] et de Burns et Parry [6], avait pour objectif principal de déterminer l'influence d'une pression hydrostatique élevée sur la résistance à la fatigue du métal.

Pour traduire au mieux l'ensemble de ses résultats expérimentaux Crossland [8] propose comme contrainte équivalente, une combinaison linéaire de l'amplitude de $\sqrt{J_2(t)}$ et de P_{max}, pression hydrostatique maximale du cycle des contraintes :

$$\tau_a + a\, P_{max} \leq b \qquad \text{(II.4.9)}$$

Ce critère joint aux définitions de τ_a et P_{max} (équations I.3.18, I.3.20) est applicable à tout chargement périodique. Les constantes a et b peuvent être identifiées par les essais en torsion et flexion alternées :

$$a = \frac{t - \frac{f}{\sqrt{3}}}{\frac{f}{3}} \quad ; \quad b = t \qquad \text{(II.4.10)}$$

Pour conserver l'effet favorable d'une pression hydrostatique négative, la constante a doit rester strictement positive ce qui conduit à la condition :

$$\frac{f}{t} < \sqrt{3} \qquad \text{(II.4.11)}$$

En flexion-torsion alternée à trajet de charge radial, le critère de Crossland conduit à la relation :

$$\frac{T_a^2}{t^2} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{f}{t} - 1\right)\frac{\Sigma_a^2}{f^2} + \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{f}{t}\right)\frac{\Sigma_a}{f} \leqslant 1 \qquad \text{(II.4.12)}$$

Cette relation est très proche de l'arc de l'ellipse de Gough-Pollard (équation II.2.2) proposé pour les métaux fragiles, ce qui semble restreindre le champ d'application du critère de Crossland. Comme l'arc de l'ellipse, l'équation (II.4.12) coïncide avec le quadrant de l'ellipse de Gough-Pollard (équation II.2.1) proposé pour les métaux ductiles, lorsque le rapport $\frac{f}{t}$ prend une valeur particulière qui n'est plus 2 mais $\sqrt{3}$. Pour cette valeur particulière le critère de Crossland ne dépend plus de la pression (a = 0). On retrouve ainsi une propriété déjà énoncée par Gough et Pollard [29], à savoir que le quadrant de l'ellipse est valable pour la flexion-torsion à trajet de charge radial avec état moyen des contraintes nul ou non. D'autre part, le critère de Crossland reproduit bien l'influence d'une torsion statique (négligeable) sur la résistance à la fatigue de métaux.

En conclusion, le critère de Crossland est celui qui, jusqu'ici, semble représenter le mieux les tendances générales des résultats expérimentaux en fatigue.

II.4.4 LE CRITERE DE KAKUNO-KAWADA

Kakuno et Kawada suggèrent de distinguer les influences respectives de l'amplitude $\mathcal{P}_a$ et de la valeur moyenne $\mathcal{P}_m$ de la pression hydrostatique. Ils choisissent donc une contrainte équivalente combinaison linéaire de $\mathcal{P}_a$, $\mathcal{P}_m$ et de l'amplitude de $\sqrt{\mathcal{J}_2(t)}$ et proposent le critère [40]

$$\tau_a + a\,\mathcal{P}_m + c\,\mathcal{P}_a \leqslant b \qquad \text{(II.4.13)}$$

Les trois constantes a, b et c peuvent être identifiées par des essais en torsion alternée, flexion alternée et flexion répétée :

$$b = t \quad , \quad c = \frac{t - \frac{f}{\sqrt{3}}}{\frac{f}{3}} \quad , \quad a = \frac{t - \frac{f_o}{\sqrt{3}}}{\frac{f_o}{3}} - c \qquad \text{(II.4.14)}$$

Pour des chargements alternés ($\mathcal{P}_m = 0$) , le critère de Kakuno-Kawada coïncide avec le critère de Crossland puisqu'alors $P_a = \mathcal{P}_{max}$. La condition $\frac{f}{t} < \sqrt{3}$ est donc encore nécessaire. Cependant, pour $\frac{f}{t} = \sqrt{3}$, l'influence de la pression est conservée puisque l'on retrouve alors le critère de Sines (équation II.4.2).

En somme, le critère de Kakuno-Kawada est une synthèse des critères de Sines et de Crossland. Son inconvénient majeur est qu'il nécessite l'identification d'une constante supplémentaire.

II.4.5 L'APPROCHE DE DEITMANN-ISSLER

Elle s'apparente à l'approche de Mc Diarmid dans la mesure où Deitmann et Issler [15], [39], élaborent aussi leur critère à partir des relations empiriques dont l'une est la parabole de Gerber (II.2.9). On rappelle que celle-ci donne l'influence de la contrainte moyenne Σ_m sur l'amplitude limite Σ_a pour un essai en traction-compression asymétrique. Deitmann et Issler proposent une généralisation possible de la parabole de Gerber dans le cas d'un chargement multiaxial, les rôles des quantités Σ_m et Σ_a étant respectivement joués par la pression moyenne $\mathcal{P}_m$ et l'amplitude $\mathcal{T}_a$ de $\sqrt{J_2(t)}$:

$$\left(\frac{\mathcal{T}_a}{\frac{f}{\sqrt{3}}} \right)^2 + \frac{\mathcal{P}_m}{\frac{\sigma_u}{3}} \leqslant 1 \qquad \text{(II.4.15)}$$

On vérifie aisément que, pour un chargement en traction-compression asymétrique, la relation (II.4.15) coïncide avec la parabole de Gerber (II.2.9), puisqu'alors $\mathcal{P}_m = \frac{\Sigma_m}{3}$ et $\mathcal{T}_a = \frac{\Sigma_a}{\sqrt{3}}$. Malheureusement, utilisée dans le cas de la torsion alternée ($\mathcal{T}_a = t$, $\mathcal{P}_m = 0$), elle conduit au résultat $\frac{f}{t} = \sqrt{3}$, ce qui restreint son champ d'application.

De manière analogue, Deitmann et Issler généralisent une relation empirique qui traduit l'influence de la torsion moyenne T_m sur l'amplitude limite T_a lors d'un essai en torsion asymétrique :

$$\left(\frac{T_a}{t} \right)^2 + \left(\frac{T_m}{\tau_u} \right)^2 = 1 \qquad \text{(II.4.16)}$$

Pour un chargement multiaxial, les quantités T_m et T_a sont respectivement remplacées par la valeur moyenne τ_m et l'amplitude τ_a de $\sqrt{J_2(t)}$, d'où la relation :

$$\left(\frac{\tau_a}{t} \right)^2 + \left(\frac{\tau_m}{\tau_u} \right)^2 \leqslant 1 \qquad \text{(II.4.17)}$$

Il reste alors à combiner les équations (II.4.15) et (II.4.17) de manière à ce que chacune d'elles apparaisse comme un cas particulier d'un critère plus général donnant l'influence combinée de P_m et τ_m sur τ_a. Le calcul proposé par Deitmann et Issler équivaut à la relation :

$$\tau_a \leqslant \left\{ \left[1 - \left(\frac{\tau_m}{\tau_u} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{P_m}{\frac{\sigma_u}{3}} \right] \right\}^{1/2} \frac{f}{\sqrt{3}} \qquad \text{(II.4.18)}$$

Pour $P_m = 0$, on retrouve bien la relation (II.4.17) et, pourvu que le rapport $\frac{f}{t}$ vaille $\sqrt{3}$, on retrouve la relation (II.4.15) pour $\tau_m = 0$. L'égalité $\frac{f}{t} = \sqrt{3}$, que l'on obtient aussi en utilisant la relation (II.4.18) dans le cas de la torsion alternée, restreint le champ d'application.

Deitmann et Issler ont utilisé ce critère pour interpréter les résultats expérimentaux qu'ils avaient obtenus en soumettant des tubes minces ouverts à une pression interne et une traction longitudinale, toutes deux sinusoïdales mais déphasées. Dans ce cas, les directions principales du tenseur des contraintes sont fixes. Le plan octaédrique est donc un plan matériel particulier sur

lequel la pointe du vecteur $\underline{\tau}_{oct}$ décrit une courbe fermée Φ' au cours d'un cycle de chargement (voir Fig. II.6).

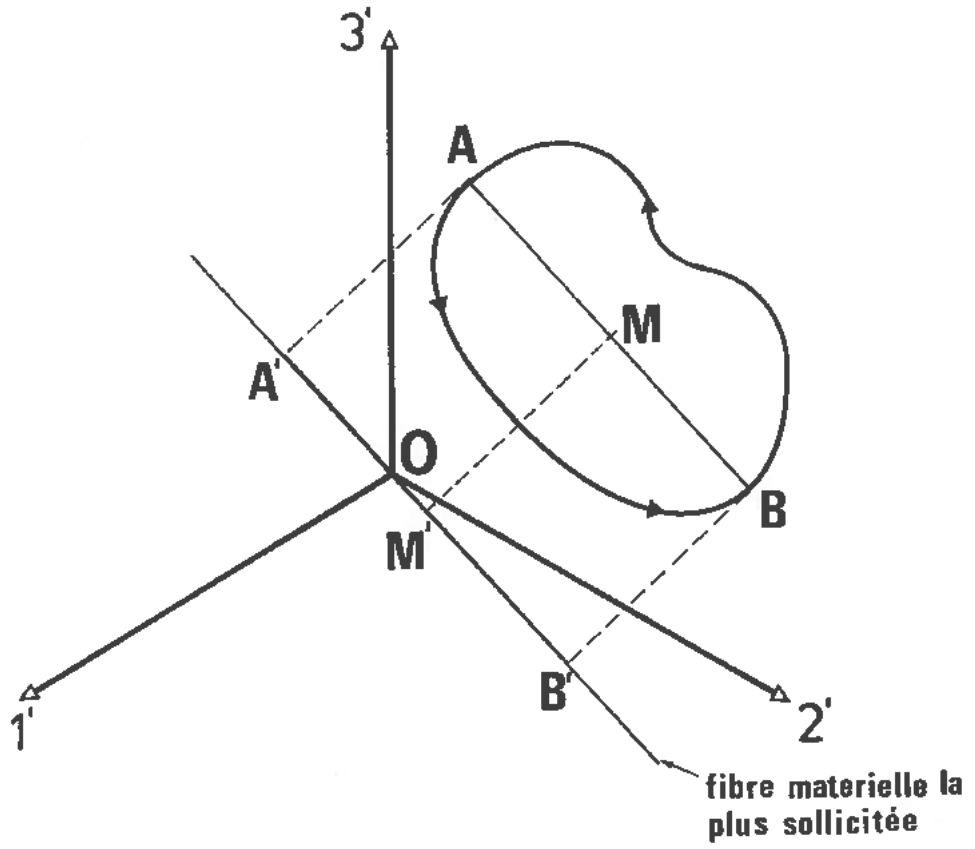


Figure II.6 Représentation du trajet du chargement dans le plan octaédrique.

Puisque $\sqrt{J_2(t)}$ est égale à la cission octaédrique $\|\underline{\tau}_{oct}(t)\|$ au facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ près, cette courbe contient toutes les données nécessaires pour le calcul de τ_a et τ_m. Deitmann et Issler introduisent alors le concept de la fibre matérielle la plus sollicitée. Il s'agit d'une droite passant par l'origine sur laquelle le segment obtenu par projection orthogonale de la courbe Φ' est le plus long (voir Fig. II.6). Ils affirment ensuite que la longueur de ce segment A'B' et la distance de son centre à l'origine OM' sont respectivement égales à $2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\tau_a$ et $\sqrt{\frac{2}{3}}\,\tau_m$. En examinant attentivement ce raisonnement, nous allons voir que, sauf

dans des cas très particuliers, ce concept de fibre matérielle n'est pas bien défini et surtout, qu'il conduit à un résultat faux pour τ_m . Tout d'abord, la fibre matérielle la plus sollicitée n'est pas toujours unique. Par exemple, si la courbe Φ' est un cercle, toutes les directions du plan octaédrique satisfont à la définition donnée. En revanche, la longueur maximale du segment obtenu par projection de la courbe Φ', elle, est unique puisqu'il s'agit du diamètre de la courbe Φ' qui vaut, par définition, $2C_{oct,a}$. Comme d'autre part,

$$\tau_a = \sqrt{\frac{3}{2}}\ C_{oct,a} \qquad \text{(II.4.19)}$$

la définition de τ_a donnée par Deitmann et Issler coïncide avec celle, plus générale, donnée au paragraphe I.3 (équation I.3.18). Par contre, la définition de τ_m est certainement erronée et ceci pour deux raisons. D'une part, si la fibre matérielle la plus sollicitée n'est pas unique, τ_m ne l'est pas non plus. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre le cas où la courbe Φ' est un cercle non centré sur l'origine. D'autre part, même en supposant qu'il conduise à une valeur unique, le calcul préconisé par Deitmann et Issler ne mène certainement pas à τ_m. Pour le comprendre, considérons la série de chargements à trajets affines dont les courbes Φ'_i associées sont représentées sur la figure II.7.

Selon Deitmann et Issler, tous ces chargements admettent le même τ_m à savoir zéro (puisque $M' \equiv 0$, Fig. II.7), ce qui est absurbe. En réalité, chacun de ces trajets admet un τ_m différent, égal à $\sqrt{\frac{2}{3}}\ OM_i$, M_i étant le milieu du segment Φ'_i (i.e. A_iB_i, voir Fig. II.7).

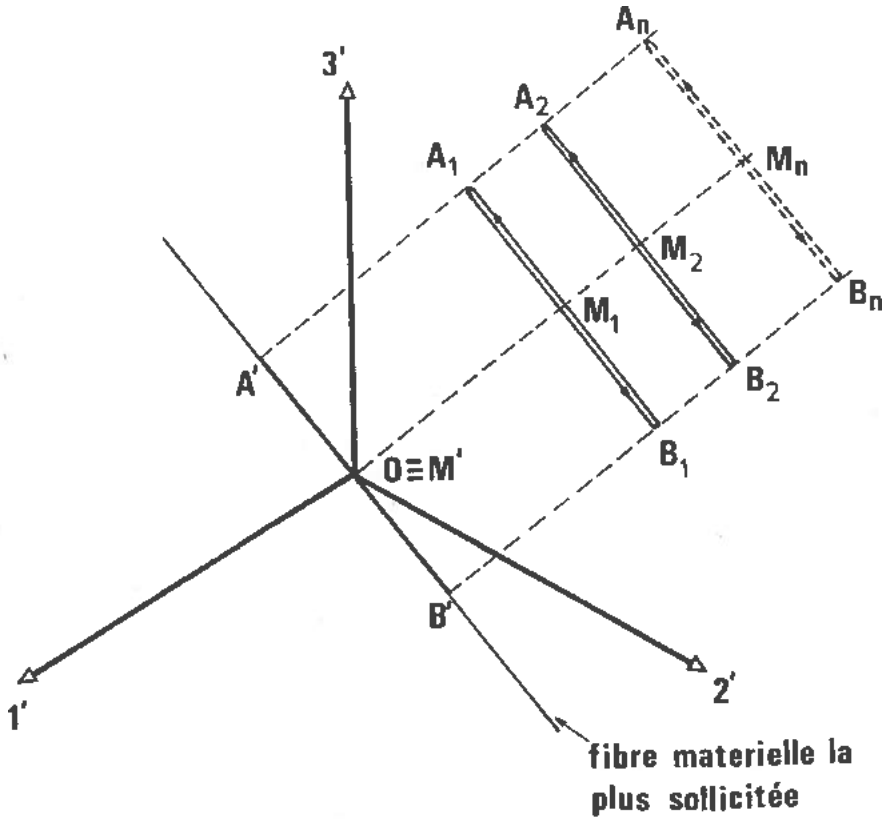


Figure II.7 Exemple des chargements à trajets affines dans le plan octaédrique.

Finalement, le seul cas où la technique de la fibre matérielle la plus sollicitée conduit à des résultats corrects est celui d'un chargement proportionnel. L'analyse des résultats expérimentaux faite par Issler [39] est donc fausse. Ajoutons que cette technique n'est plus du tout valable pour un chargement périodique tel que les directions principales varient puisque le plan octaédrique n'est plus fixe.

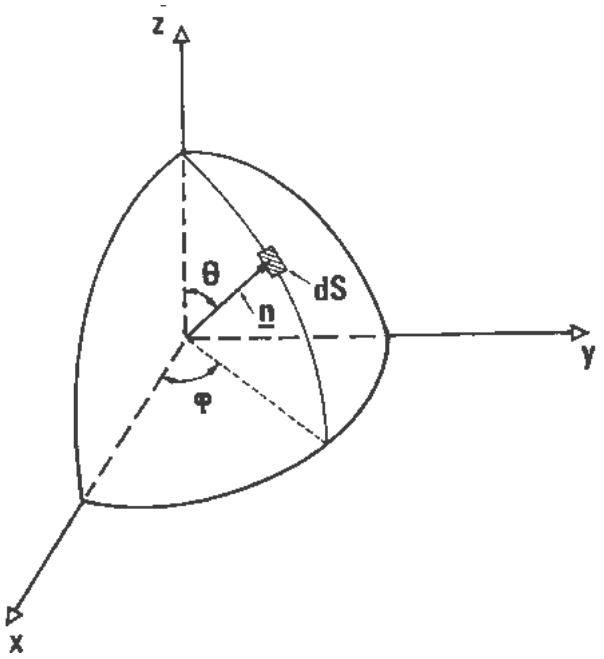
D'un point de vue plus concret, il se trouve que le critère (équation II.4.18) proposé par Deitmann et Issler n'est pas conforme à un grand nombre de résultats expérimentaux obtenus en torsion asymètrique [68] et qui montrent que l'influence de τ_m sur τ_a est très faible, voir négligeable. Si nous négligeons complètement cette influence, le critère se réduit à la relation de Gerber généralisée (équation II.4.15). Cette dernière a également été proposée par Deitmann et Issler comme une simplification du critère complet équation (II.4.18), [15]. Les calculs sont alors simplifiés et l'erreur inhérente à la détermination de τ_m est éliminée.

II.4.6 L'APPROCHE DE GRUBISIC-SIMBURGER

Elle est fondée sur la remarque de Novozhilov, (**Novozhilov**, V.V. Theory of Elasticity, Pergamon Press, London, 1961), selon laquelle la moyenne quadratique de la cission, étendue à tous les plans matériels passant par un point donné d'un corps chargé, est égale à $\frac{2}{5}\,\vartheta_2$, ϑ_2 étant le second invariant du tenseur déviateur des contraintes :

$$\frac{2}{5}\,\vartheta_2 = \left\langle \| \underline{C} \|^2 \right\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_S \| \underline{C}(\underline{n}) \|^2 dS \qquad \text{(II.4.20)}$$

où S est la sphère de rayon unité. En coordonnées sphèriques, le vecteur $\underline{n}$ est repéré par les angles φ et θ (voir Fig. II.8) et $dS = \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$.



$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cdot \sin\theta \\ \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Figure II.8 Coordonnées du vecteur unitaire $\underline{n}$.

Pour les chargements statiques, le critère de von Mises peut donc être interprété comme une limitation portant sur $\sqrt{\frac{5}{2}} \left\langle \| \underline{C} \|^2 \right\rangle^{1/2}$. Grubisic et Simbürger [31], [67] suivent un raisonnement analogue pour élaborer un critère de fatigue des métaux ductiles. Pour chaque plan matériel passant par un point du corps, ils calculent l'amplitude $C_a(\underline{n})$ et la valeur moyenne $C_m(\underline{n})$ de la cission, $\underline{n}$ étant la normale au plan considéré. En supposant l'existence d'un diagramme d'interaction linéaire entre $C_a(\underline{n})$ et $C_m(\underline{n})$,

$$C_a(\underline{n}) + K\, C_m(\underline{n}) \leqslant \lambda \qquad \text{(II.4.21)}$$

Grubisic et Simbürger définissent la "sollicitation effective" d'un plan matériel par :

$$A(\underline{n}) = \frac{C_a(\underline{n})}{\lambda - K\, C_m(\underline{n})} \qquad (II.4.22)$$

Le critère se traduit alors par une limitation portant sur $\sqrt{\frac{15}{2}} \left\langle \, (A(\underline{n}))^2 \, \right\rangle^{\frac{1}{2}}$, où $\left\langle \, (A(\underline{n}))^2 \, \right\rangle$ est la moyenne quadratique de la "sollicitation effective" étendue à tous les plans matériels passant par un même point :

$$\sqrt{\frac{15}{2}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_S (A(\underline{n}))^2 dS \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant 1 \qquad (II.4.23)$$

ou encore en coordonnées sphériques :

$$\sqrt{\frac{15}{2}} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} [A(\varphi,\theta)]^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant 1 \qquad (II.4.24)$$

Ainsi formulé, ce critère présente un certain nombre d'inconvénients voire même d'erreurs. Nous nous contentons ci-après, d'énoncer quelques critiques sans entrer dans le détail des calculs correspondants.

Primo, le critère impose un rapport $\frac{f}{t}$ fixe et égal à $\sqrt{3}$.

Secundo, il prévoit que l'influence d'une torsion moyenne T_m sur la limite d'endurance correspondante T_a est aussi sévère que celle d'une traction moyenne Σ_m sur la limite d'endurance correspondante Σ_a. Ceci est en désaccord total avec les résultats expérimentaux.

Tertio, Grubisic et Simbürger calculent la cission moyenne $C_m(\underline{n})$ et l'amplitude correspondante $C_a(\underline{n})$ sur le plan matériel donné en utilisant la technique en général

erronée de la fibre matérielle la plus sollicitée (voir § II.4.5).

Quarto, la définition de la "sollicitation effective" sur un plan matériel donné découle directement de la relation (II.4.21) établie à partir d'expériences uniaxiales. Donc cette relation, dont le diagramme de Haigh (équation II.2.8) - utilisé par Grubisic et Simbürger - est un exemple, traduit la réponse globale de l'éprouvette et non pas la réponse d'un plan matériel particulier. L'utilisation d'une relation globale à l'échelle locale constitue une erreur fondamentale dans l'approche de Grubisic-Simbürger.

Ces auteurs ont proposé une technique permettant d'étendre leur critère au cas des matériaux pour lesquels le rapport $\frac{f}{t}$ est différent de $\sqrt{3}$. Malheureusement, elle n'est applicable que dans le cas où l'état des contraintes est biaxial.

Enfin, une autre variante a été élaborée pour les métaux semi-ductiles $\left(1,4 \leqslant \frac{f}{t} \leqslant 1,7\right)$. Elle est caractérisée par l'introduction de la contrainte normale à un plan matériel (tension $\underline{N}(\underline{n})$) dans la définition de la "sollicitation effective" correspondante. Il n'en demeure pas moins que certaines des critiques précédentes, notamment la quatrième, sont toujours valables, si bien que nous ne pousserons pas notre analyse plus loin.

II-5 REMARQUES SUR LES CRITERES DE FATIGUE TRADITIONNELS

Les limitations des critères empiriques ont déjà été mises en évidence (§ II.2.5) si bien que nous n'en reparlerons pas.

Parmi les critères de fatigue issus du critère de Tresca, ceux de Stulen-Cummings et de Findley prévoient une influence de la torsion moyenne sur la limite d'endurance lors d'essais en torsion asymétrique. Ceci est contraire à l'observation expérimentale tant que l'éprouvette essayée se comporte de façon purement élastique (i.e. domaine de la fatigue polycyclique). Cette observation est illustrée sur la figure II.9, d'après Sines [68].

Les critères de Matake et Mc Diarmid sont conformes à cette observation. En revanche, ils sont tels que la contrainte équivalente n'est pas maximale sur le plan critique P_c où est supposée s'amorcer la fissure de fatigue. Cela sous-entend que le matériau résiste mieux dans certaines directions que dans d'autres, ce qui contredit l'hypothèse d'isotropie.

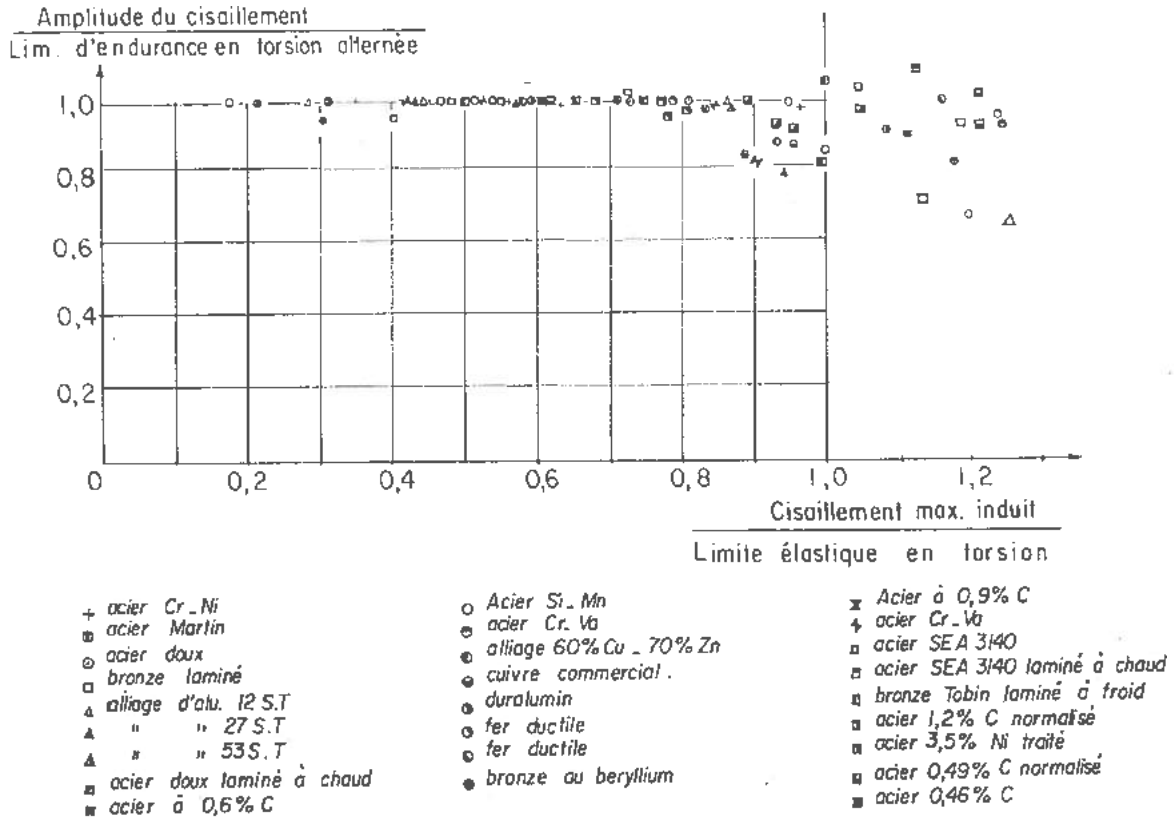


Figure II.9 Indépendance de la limite d'endurance en torsion vis-à-vis de la torsion moyenne [68].

Parmi les critères de fatigue issus du critère de von Mises, le critère de Marin ne fait pas de différence entre un état moyen de traction et un état moyen de compression ce qui est en désaccord total avec les résultats expérimentaux. Le critère de Sines a un champ d'application restreint $\left(\frac{f}{t} = \sqrt{3} \right)$ comme d'ailleurs le critère de Deitmann-Issler sous sa forme simplifiée. Sous sa forme complète, ce dernier critère est fondé sur le concept contestable de la "fibre matérielle" la plus sollicitée.

L'idée de départ de Grubisic-Simbürger est très intéressante mais une accumulation d'erreurs, notamment une mauvaise interprétation du diagramme de Haigh, invalide le critère obtenu. Le critère de Crossland reproduit bien les tendances générales des résultats expérimentaux pour une gamme de métaux relativement large $\left(\frac{f}{t} < \sqrt{3} \right)$. Enfin, le critère de Kakuno-Kawada réunit les qualités des critères de Sines et Crossland mais au prix de l'introduction d'une troisième constante à déterminer.

Parmi les critères traditionnels, le critère de Crossland réalise le meilleur compromis entre une formulation simple (deux constantes à déterminer) et une bonne reproduction des observations expérimentales.

CHAPITRE III

L'APPROCHE MICROSCOPIQUE

III-1 LE CHOIX DE L'APPROCHE MICROSCOPIQUE

De tous les critères traditionnels de fatigue présentés dans le chapitre précédent, le critère de Crossland semble être le plus réaliste. Il rend compte des tendances générales des observations expérimentales et respecte l'hypothèse phénoménologique du corps homogène et isotrope. Jusqu'ici, nous nous sommes toujours placés à l'échelle macroscopique c'est-à-dire celle dans laquelle l'ingénieur définit habituellement les contraintes et les déformations. Mais une telle analyse ne nous a pas permis de dégager la physique du phénomène de fatigue. Pour cela, il est nécessaire de passer à l'échelle microscopique, c'est-à-dire à l'échelle du grain du métal.

Dans la suite, nous essayons, tout d'abord, de décrire qualitativement l'évolution des paramètres microstructuraux du métal lors d'un essai de fatigue. Ensuite, nous étudions le problème concernant la définition physique de la limite d'endurance. Finalement, nous étudions, succinctement, le comportement élastoplastique de monocristaux métalliques sous chargement cyclique.

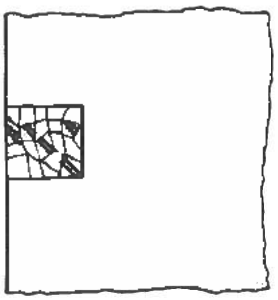
III.1.1 L'APPROCHE MICROSCOPIQUE : POURQUOI ?

Les résultats expérimentaux des essais uniaxiaux en fatigue polycyclique sont traditionnellement représentés dans un diagramme de Wöhler où l'on porte l'amplitude S de la contrainte imposée en fonction du nombre N de cycles à la rupture. Pour la plupart des métaux, cette courbe S-N, dite courbe de Wöhler, admet une asymptote horizontale lorsque N devient grand. L'amplitude de la contrainte correspondante est appelée limite d'endurance.

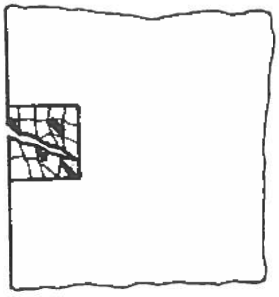
A l'échelle macroscopique, l'éprouvette est constituée d'un métal supposé homogène et isotrope, et a un comportement purement élastique au cours d'un essai en fatigue polycyclique.

A l'échelle microscopique, le métal est constitué de monocristaux d'orientation aléatoire. Pour la plupart des métaux (nombreux aciers, aluminium, cuivre), ce sont des cristaux cubiques. Lors d'un essai en fatigue polycyclique, des phénomènes à caractère irréversible se produisent à l'échelle microscopique, bien qu'à l'échelle macroscopique, le comportement demeure élastique. L'examen des cristaux constitutifs d'une éprouvette montre que la période de N cycles, entre la mise en charge et la rupture, peut être décomposée en trois phases successives (Fig. III.1).

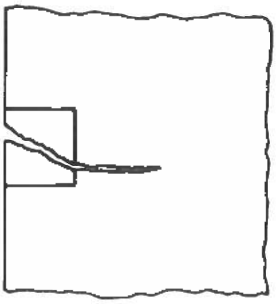
Durant les N_n premiers cycles, quelques cristaux se plastifient parce que défavorablement orientés par rapport au chargement. Ces plastifications ne sont pas détectables à l'échelle macroscopique. Dans ces cristaux "privilégiés",



Nucléation - Stade 0



Formation - Stade I



Propagation - Stade II

Figure III.1 Mise en évidence de trois phases durant la rupture par fatigue.

la plastification se fait suivant des bandes de glissement persistantes [30], [44], [57], et s'accompagne d'un écrouissage considérable. Finalement, des microfissures apparaissent dans ces bandes de glissement ou à leur interface avec le reste du cristal [57]. La première phase, que nous appellerons stade 0, s'achève donc avec la rupture de ces quelques cristaux "privilégiés" (Fig. III.1.a).

Au cours des N_c cycles suivants, il y a coalescence des microfissures qui se joignent pour former des fissures de taille détectable. En s'étendant, elles constitueront une fissure macroscopique (Fig. III.1.b). Cette phase correspond au stade I selon Forsyth [25].

Enfin, durant les N_p derniers cycles, la macrofissure se propage jusqu'à la rupture finale de l'éprouvette (Fig. III.1.c). Cette phase est appelée stade II selon Forsyth [25].

L'information fournie par la courbe de Wöhler concernant la durée de vie d'une éprouvette est donc globale. Le nombre de cycles N donné par une courbe S-N pour une certaine sollicitation recouvre trois phases successives de la vie de l'éprouvette au cours desquelles les phénomènes mis en jeu sont différents. Une courbe de Wöhler ne donne pas accès aux nombres de cycles N_n, N_c, et N_p associés à ces trois phases, mais seulement à leur somme $N = N_n + N_c + N_p$.

Récemment [43], des moyens expérimentaux plus sophistiqués ont permis de détecter l'apparition des petites fissures. Nous pouvons donc admettre qu'expérimentalement il est possible de mesurer le nombre de cycles $N_a = N_n + N_c$ en interrompant l'essai au moment où une

petite fissure se forme et avant qu'elle ne commence à se propager. En reportant l'amplitude S de la contrainte imposée en fonction du nombre N_a de cycles, on obtient une courbe analogue à celle de Wöhler, dite courbe $S\text{-}N_a$ à l'amorçage. Pour N grand, cette courbe admet la même asymptote horizontale que la courbe S-N correspondante. Elle permet donc aussi d'obtenir la limite d'endurance du matériau pour le chargement considéré.

De la même façon, nous pouvons postuler l'existence d'une courbe $S\text{-}N_n$ à la nucléation de microfissures. La construction expérimentale d'une telle courbe nécessiterait que l'on sache détecter des fissures de taille comparable à celle du grain du métal, ce qui n'est pas facile [50]. Lorsque N est grand, la courbe $S\text{-}N_n$ admet une asymptote horizontale et la valeur de l'amplitude de la contrainte associée est appelé seuil de non nucléation des microfissures. Ce seuil n'est pas forcément égal à la limite d'endurance du matériau [64], car il est possible que cette dernière corresponde à la non-propagation des petites fissures apparues à la suite de la coalescence des microfissures. Dans ce cas, les deux premières phases de la fatigue ont lieu sans que la troisième (i.e. la propagation) ne se déclenche. Le seuil de non-nucléation est alors inférieur à la limite d'endurance. Néanmoins, dans ce travail, ces deux valeurs limites seront confondues étant donné que leur différence est du même ordre que la dispersion statistique des résultats expérimentaux, cette dernière étant très importante surtout lorsque le nombre N de cycles est grand [1].

Il en résulte immédiatement que la surface d'endurance traditionnellement décrite par le critère de fatigue, sera confondue avec la surface seuil de non nucléation des

microfissures. Nous nous proposons donc ici de déterminer un critère de fatigue à partir de l'interprétation physique du seuil de non-nucléation et non de la limite d'endurance. Pour cela, nous allons faire appel aux résultats fondamentaux de la théorie de l'élastoplasticité [32]. La réponse d'une structure élastoplastique soumise à un chargement périodique peut prendre trois formes différentes : l'adaptation, l'accommodation ou le rochet. Dans les deux derniers cas, la ruine est atteinte, soit par fatigue plastique (accommodation), soit par cumul illimité des déformations plastiques (rochet). En revanche, la rupture est exclue si la structure s'adapte. Nous allons appliquer cette théorie aux cristaux défavorablement orientés qui se plastifient durant la première phase (stade 0) d'un essai en fatigue. Ces cristaux ne se rompent pas (i.e. il n'y a pas nucléation de microfissures), si et seulement s'ils s'adaptent. La surface seuil de non nucléation apparaît alors comme la frontière du domaine d'adaptation potentielle du cristal pour tout chargement périodique. Ce domaine, qui dépend du comportement élastoplastique du cristal , est défini dans l'espace des contraintes locales, c'est-à-dire dans l'espace des microcontraintes σ_{ij} du cristal, différentes des contraintes Σ_{ij} à l'échelle macroscopique familière à l'ingénieur. Il nous faut donc d'une part connaître le comportement élastoplastique du cristal et d'autre part établir les relations qui permettent d'évaluer les contraintes microscopiques $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction des contraintes macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}$.

III.1.2 RAPPEL SUCCINCT DU COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES CRISTAUX

Pour étudier le comportement d'un monocristal, on peut le soumettre à des chargements cycliques effectués à déformation imposée. On examine alors les variations de la contrainte maximale mesurée à la fin de chaque demi-cycle, en fonction du nombre de cycles effectués et de l'amplitude de la déformation imposée. Au cours d'un tel essai, il est en général possible de distinguer deux stades. Tout d'abord, la contrainte augmente très rapidement (écrouissage-durcissement pour les métaux recuits), puis elle reste quasiment constante (saturation). La figure III.2 représente des courbes d'écrouissage de monocristaux de fer d'après [30].

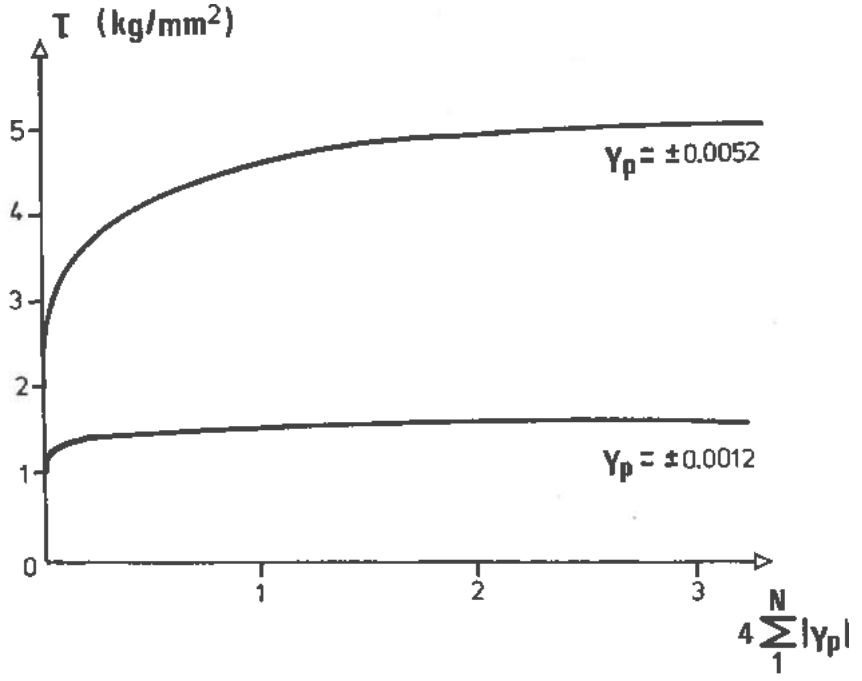


Figure III.2 Courbes d'écrouissage sous sollicitation cyclique de monocristaux de fer [30]

Ces courbes représentent l'évolution de la contrainte maximale atteinte en fin de chaque cycle, en fonction de la déformation plastique cumulée correspondante. Les deux courbes (Fig. III.2) révèlent l'existence des deux stades cités précédemment. La figure III.3, d'après [37], représente l'évolution de la largeur de la boucle d'hystérésis en fonction du nombre de cycles effectué. Il s'agit ici de chargements cycliques à contrainte imposée ($\pm$ 5 MP_a) , réalisés sur des monocristaux d'aluminium dont l'orientation pouvait varier. Dans un premier temps, la largeur de la boucle diminue, ce qui révèle l'existence d'un écrouissage isotrope, puis elle se stabilise (saturation).

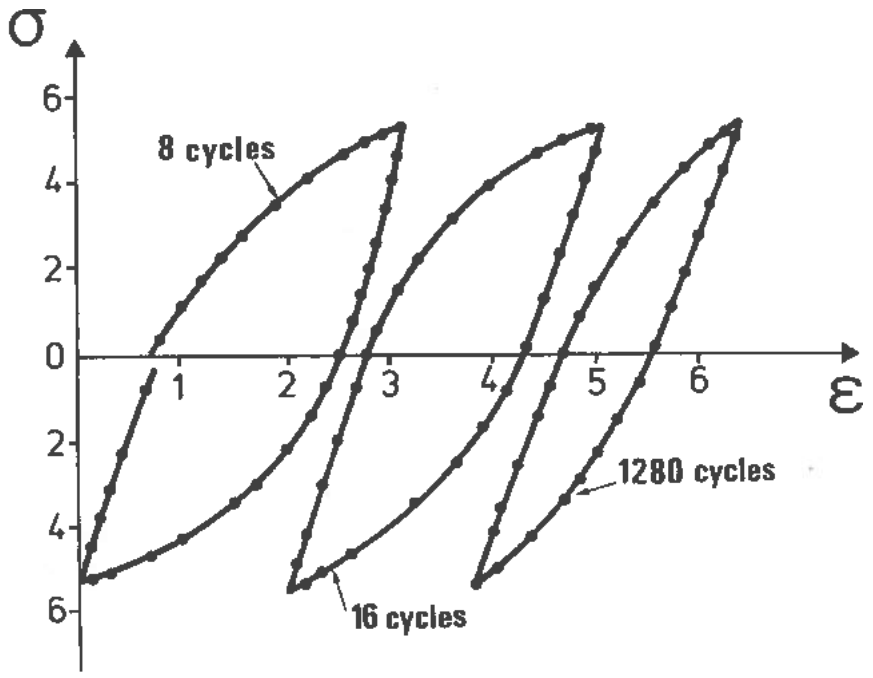


Figure III.3 Evolution de la largeur de la boucle d'hystérésis, pour des monocristaux d'aluminium sollicités en contrainte imposée [37].

La plus simple interprétation mécanique de l'ensemble des courbes des figures III.2 et III.3 consiste à supposer qu'un mécanisme de durcissement isotrope est activé dès le début du chargement et arrive à saturation après un petit nombre de cycles. Par le terme durcissement isotrope, nous désignons une augmentation absolue de la limite d'élasticité du métal. Plusieurs interprétations physiques relatives aux mouvements des dislocations ont été proposées pour expliquer cette augmentation de la résistance du cristal au glissement plastique. Pour Feltner [42], l'écrouissage provient du mouvement des dipoles de dislocations d'une position d'équilibre à une autre (mécanisme "flip-flop"). Une autre explication possible [42], [63] est l'activation, en tant que sources de Frank-Read, des segments de dislocations libres. Un troisième groupe de modèles est basé sur l'interaction entre les dislocations mobiles et les défauts ou boucles de dislocations [42], [5]. Nous ne ferons pas appel aux formulations mathématiques détaillées de ces divers modèles mais nous retiendrons leur caractéristique commune à savoir que la limite d'élasticité du cristal est une fonction monotone croissante de la densité des dislocations. La figure III.4, d'après Klesnil-Lukaš [42] , représente l'évolution de la densité des dislocations en fonction du nombre de cycles effectués, pour un agrégat polycristallin de fer, sollicité en traction-compression alternée. La courbe obtenue est tout-à-fait similaire à celles des figures III.2 et III.3. La densité des dislocations augmente rapidement durant les premiers cycles pour se stabiliser ensuite à une valeur de saturation.

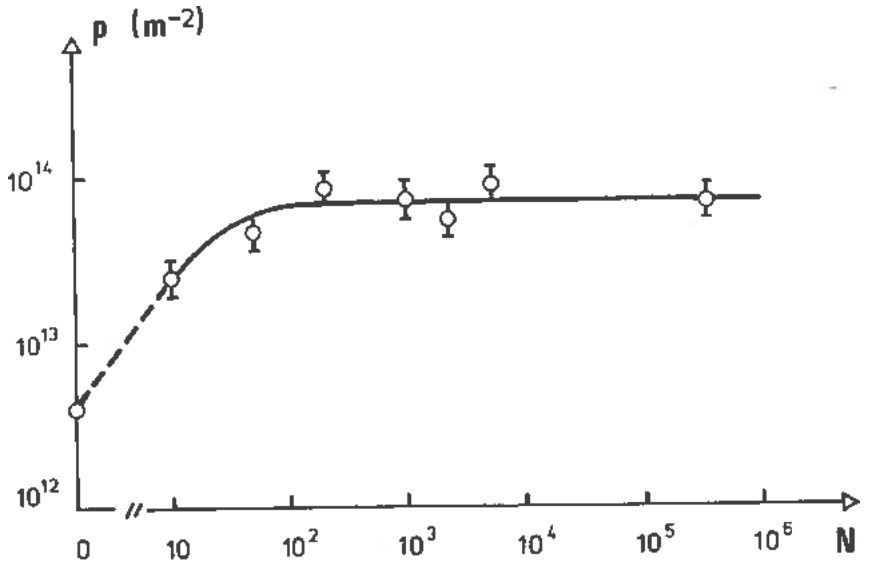


Figure III.4 Evolution de la densité des dislocations en fonction du nombre de cyles [42].

Lors d'une sollicitation à déformation imposée, la boucle d'hystérésis du monocristal peut présenter un effet Bauschinger [30], mais aucune interprétation satisfaisante de cette asymétrie n'a été donnée jusqu'à aujourd'hui [42]. En revanche, la même asymétrie observée sur la boucle d'hystérésis du polycristal est la manifestation d'un écrouissage de type cinématique, dû aux incompatibilités des déformations plastiques entre les différents grains.

Finalement, de cette rapide discussion sur le comportement du cristal sous chargement cyclique, nous ne retiendrons que les deux propriétés suivantes :

- L'écrouissage isotrope du cristal est directement lié à l'augmentation de la densité de dislocations. Les mécanismes associés à cet écrouissage sont activés dès le début du chargement mais arrivent à saturation après un nombre restreint de cycles.

La boucle d'hystérésis du cristal est asymétrique. Bien qu'aucune explication satisfaisante ne soit actuellement disponible, nous admettrons que le cristal présente un écrouissage de type cinématique.

Lors de la modélisation in situ du comportement des cristaux défavorablement orientés, nous tiendrons compte de ces deux propriétés.

III-2 PASSAGE MACROSCOPIQUE - MICROSCOPIQUE

III.2.1 LES RELATIONS GENERALES DE PASSAGE A L'ECHELLE MICROSCOPIQUE

L'état mécanique d'un milieu continu est décrit à l'aide de grandeurs macroscopiques (contraintes et déformations) définies en tout point $\underline{x}$ du corps. Plus précisément, cela revient à définir autour du point $\underline{x}$, un volume élémentaire $V(\underline{x})$ supposé homogène et isotrope, dans lequel les tenseurs des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x})$ et des déformations $\underline{\underline{E}}(\underline{x})$ sont constants. C'est ce que l'on appelle l'échelle macroscopique (Fig. III.5).

En réalité, dans le cas des métaux, le volume élémentaire $V(\underline{x})$ contient de nombreux cristaux d'orientations, de formes et d'états internes différents. Cela nous amène à définir une échelle microscopique de l'ordre des grains ou des groupes de grains qui constituent une partition de $V(\underline{x})$. L'état mécanique d'un grain est décrit par les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y};\underline{x})$ et des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{y};\underline{x})$ microscopiques où $\underline{y}$ désigne la position du cristal dans un repère local associé à $V(\underline{x})$ (Fig. III.5). Les grandeurs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ne sont pas homogènes dans $V(\underline{x})$ et, par conséquent, différent de $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{E}}$. En général, le passage des grandeurs microscopiques du cristal (i.e. du grain) aux grandeurs

macroscopiques du polycristal (i.e. du volume $V(\underline{x})$), ne peut pas se faire par une opération directe de moyenne.

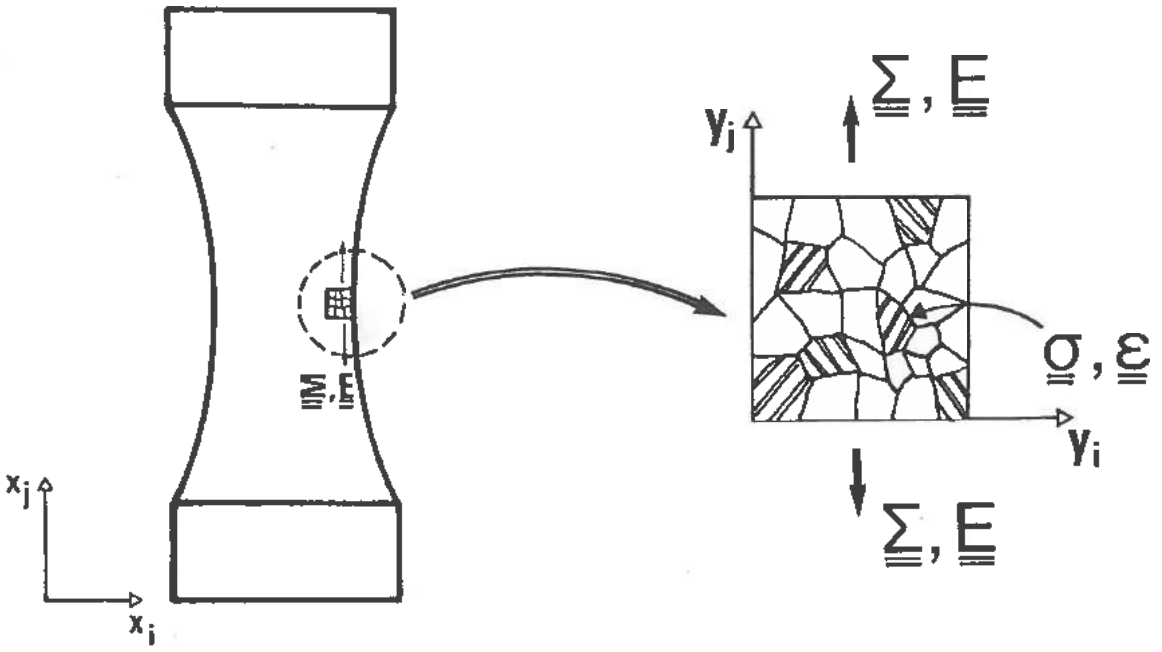


Figure III.5 Echelles macroscopique et microscopique pour un métal polycristallin.

Cependant, Hill [35] et Mandel [45] ont défini une condition connue sous le nom d'hypothèse de macro-homogénéité, par laquelle l'opération directe de moyenne est correcte. Dans ce cas, à partir de tout champ de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{y};\underline{x})$ cinématiquement admissible et de tout champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y};\underline{x})$ statiquement admissible, ces deux champs n'étant pas nécessairement associés, on peut calculer la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}(\underline{x})$, la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x})$ et le travail de déformation par des moyennes directes [4], [5] :

$$\underline{\underline{E}}(\underline{x}) = \frac{1}{V}\int_V \underline{\underline{\varepsilon}}\ (\underline{y};\underline{x})\ dV_y \qquad \text{(III.2.1)}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) = \frac{1}{V}\int_V \underline{\underline{\sigma}}\ (\underline{y};\underline{x})\ dV_y \qquad \text{(III.2.2)}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}}(\underline{x}) = \frac{1}{V}\int_V \underline{\underline{\sigma}}\ (\underline{y};\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{y};\underline{x})\ dV_y \qquad \text{(III.2.3)}$$

Le principe des travaux virtuels permet de montrer que l'équation (III.2.1) est exacte pour un essai à déformation homogène et que l'équation (III.2.2) l'est pour un essai à contrainte homogène. Par contre, nous ne pouvons pas écrire des relations analogues pour les parties élastiques et plastiques de la déformation, dont les définitions sont rappelées ci-après :

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}^p\ (\underline{y};\underline{x}) &= \underline{\underline{\varepsilon}}\ (\underline{y};\underline{x}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^e\ (\underline{y};\underline{x}) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^e\ (\underline{y};\underline{x}) &= \underline{\underline{\underline{\ell}}}^{-1}(\underline{y};\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}\ (\underline{y};\underline{x}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.2.4)}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{E}}^p\ (\underline{x}) &= \underline{\underline{E}}\ (\underline{x}) - \underline{\underline{E}}^e\ (\underline{x}) \\ \underline{\underline{E}}^e\ (\underline{x}) &= \underline{\underline{\underline{L}}}^{-1}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}}\ (\underline{x}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.2.5)}$$

où $\underline{\underline{\underline{\ell}}}^{-1}(\underline{y};\underline{x})$ et $\underline{\underline{\underline{L}}}^{-1}(\underline{x})$ sont les tenseurs, microscopique et macroscopique, des compliances élastiques.

Les relations correctes de passage micro-macro pour les parties plastiques et élastiques de la déformation ont été établies par Mandel [45]. Elles font intervenir le tenseur de localisation des contraintes $\underline{\underline{\underline{A}}}(\underline{y})$ qui associe à la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x})$, la contrainte microscopique fictive $\underline{\underline{\underline{A}}}(\underline{y}) : \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x})$, qui existerait si le milieu

était purement élastique. On obtient alors les relations suivantes [5],

$$\underline{\underline{E}}(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int \underline{\underline{\mathcal{E}}}(\underline{y};\underline{x}) : \underline{\underline{A}}(\underline{y}) \, dV_y \qquad \text{(III.2.6)}$$

et

$$\underline{\underline{E}}^e(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\mathcal{E}}}^e(\underline{y};\underline{x}) : \underline{\underline{A}}(\underline{y}) \, dV_y \qquad \text{(III.2.7)}$$

qui, par soustraction, conduisent à :

$$\underline{\underline{E}}^p(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\mathcal{E}}}^p(\underline{y};\underline{x}) : \underline{\underline{A}}(\underline{y}) \, dV_y \qquad \text{(III.2.8)}$$

La relation (III.2.6) étant strictement équivalente à la relation (III.2.1), on obtient :

$$\frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{A}}(\underline{y}) \, dV_y = \underline{\underline{I}} \qquad \text{(III.2.9)}$$

Par contre, les relations (III.2.7) et (III.2.8) ne peuvent en général pas être ramenées à des formes aussi simples que celle de la relation (III.2.1).

Le tenseur des contraintes microscopiques $\underline{\underline{\mathcal{E}}}(\underline{y};\underline{x})$, peut toujours être décomposé de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}(\underline{y};\underline{x}) = \underline{\underline{\mathcal{E}}}^{e\ell}(\underline{y};\underline{x}) + \underline{\underline{\rho}}(\underline{y};\underline{x}) \qquad \text{(III.2.10)}$$

où $\underline{\underline{\rho}}(\underline{y};\underline{x})$ est un champ de contraintes autoéquilibré dans $V(\underline{x})$, appelé champ des contraintes résiduelles, et $\underline{\underline{\mathcal{E}}}^{e\ell}(\underline{y};\underline{x})$ le champ de contraintes fictives qui existerait si le milieu était purement élastique. Selon Mandel, on a :

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}^{e\ell}(\underline{y};\underline{x}) = \underline{\underline{A}}(\underline{y}) : \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) \qquad \text{(III.2.11)}$$

d'où la relation :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y};\underline{x}) = \underline{\underline{A}}(\underline{y}) : \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) + \underline{\underline{\rho}}(\underline{y};\underline{x}) \qquad \text{(III.2.12)}$$

Les déterminations de $\underline{\underline{A}}(\underline{y})$ et de $\underline{\underline{\rho}}(\underline{y};\underline{x})$ constituent deux des principales difficultés du passage micro-macro. Ce n'est qu'au prix de certaines simplifications (modèle de Lin-Taylor) qu'une solution va maintenant être formulée.

III.2.2 LES HYPOTHESES FONDAMENTALES DE L'APPROCHE MICROSCOPIQUE CHOISIE

Nous avons vu que le nombre de grains qui se plastifient durant le stade 0 d'un essai de fatigue, est très faible. Pour modéliser le comportement in situ du cristal nous pouvons donc adopter l'hypothèse d'une inclusion (le grain) plongée dans une matrice (le volume $V(\underline{x})$). De plus, nous admettrons que c'est la matrice qui impose sa déformation $\underline{\underline{E}}$ au cristal. Nous avons donc :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E}}^{e} + \underline{\underline{E}}^{p} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{p} \qquad \text{(III.2.13)}$$

Dans cette équation et toutes celles qui suivent nous omettrons les paramètres $\underline{x}$ et $\underline{y}$ afin d'alléger les notations. Comme, en fatigue polycyclique, aucune plastification n'est détectable à l'échelle macroscopique, nous négligeons le terme correspondant, c'est-à-dire $\underline{\underline{E}}^{p}$. L'équation (III.2.13) devient :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^{e} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{p} \qquad \text{(III.2.14)}$$

Afin d'évaluer le tenseur de localisation $\underline{\underline{A}}$, nous admettons que le grain et la matrice élastique sont isotropes et possèdent les mêmes coefficients élastiques, c'est-à-dire que :

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{\ell}} \qquad \text{(III.2.15)}$$

ou encore

$$L_{ijkl} = \ell_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) \qquad \text{(III.2.16)}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé communs à la matrice et à l'inclusion. En multipliant les deux membres de l'équation (III.2.14) par le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{\ell}}$, il vient :

$$\Sigma_{ij} = \left(2\mu\varepsilon^e_{ij} + \lambda\varepsilon^e_{kk}\delta_{ij}\right) + \left(2\mu\varepsilon^p_{ij} + \lambda\varepsilon^p_{kk}\delta_{ij}\right) \qquad \text{(III.2.17)}$$

Or, les déformations plastiques se font sans changement de volume $\left(\varepsilon^p_{kk} = 0\right)$. Il en découle que :

$$\Sigma_{ij} = \left(2\mu\varepsilon^e_{ij} + \lambda\varepsilon^e_{kk}\delta_{ij}\right) + 2\mu\varepsilon^p_{ij} \qquad \text{(III.2.18)}$$

Le premier terme du membre à droite n'est autre que la composante (ij) du tenseur des contraintes microscopiques $\underline{\underline{\sigma}}$ En effet, $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ vaut, par définition $\underline{\underline{\ell}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}$, donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\ell}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \Rightarrow \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon^e_{ij} + \lambda\varepsilon^e_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{(III.2.19)}$$

L'équation (III.2.18) s'écrit donc aussi :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} - 2\mu\varepsilon^p_{ij} \qquad \text{(III.2.20)}$$

D'autre part, l'équation (III.2.12) établie par Mandel s'écrit en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\,\Sigma_{kl} + \rho_{ij} \qquad \text{(III.2.21)}$$

La comparaison des équations (III.2.20) et (III.2.21) nous permet d'identifier les tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\rho}$ dans le cadre des hypothèses traduites par les équations (III.2.14) et (III.2.15). Le tenseur de localisation des contraintes $\underline{\underline{A}}$ est le tenseur unité :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}} \iff A_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \qquad \text{(III.2.22)}$$

Une conséquence directe de cette équation est que les contraintes microscopiques fictives $\underline{\underline{\sigma}}^{e\ell}$, qui existeraient dans le cristal si celui-ci était purement élastique, sont tout simplement égales aux contraintes macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{e\ell} = \underline{\underline{\Sigma}} \qquad \text{(III.2.23)}$$

D'autre part, les contraintes résiduelles microscopiques $\underline{\rho}$ dépendent des déformations plastiques du cristal $\underline{\underline{\varepsilon}}^{p}$ selon la relation :

$$\underline{\rho} = -2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}^{p} \iff \rho_{ij} = -2\mu\varepsilon^{p}_{ij} \qquad \text{(III.2.24)}$$

On en déduit immédiatement qu'à l'image de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{p}$, le tenseur $\underline{\rho}$ est un déviateur :

$$\mathrm{tr}(\underline{\rho}) = -2\mu\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{p}\right) = 0 \iff \rho_{kk} = 0 \qquad \text{(III.2.25)}$$

Cette dernière propriété implique que la pression hydrostatique microscopique p est égale à la pression hydrostatique macroscopique :

$$p = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}) \qquad \text{(III.2.26)}$$

Nous ne retiendrons finalement que les équations suivantes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{\rho}} \qquad \text{(III.2.27)}$$

et

$$\underline{\underline{\rho}} = -2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}^{p} \qquad \text{(III.2.28)}$$

Le tenseur $\underline{\underline{\rho}}$ étant un déviateur, l'équation (III.2.27), écrite pour les parties déviatoriques $\underline{\underline{s}}$ et $\underline{\underline{S}}$ de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}$ respectivement, devient :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\rho}} \qquad \text{(III.2.29)}$$

De ces dernières équations, il ressort clairement que le calcul des contraintes microscopiques se ramène à celui des contraintes résiduelles, c'est-à-dire, à l'évaluation des déformations plastiques $\underline{\underline{\varepsilon}}^{p}$ du cristal.

III-3 LE CRITERE DE DANG VAN

Nous avons expliqué, dans le paragraphe III.1.1, les raisons qui nous ont amenés à associer le critère de fatigue microscopique au seuil de non-nucléation des fissures, puis au domaine d'adaptation potentielle du cristal pour tout chargement périodique dans l'espace des contraintes microscopiques. Un tel critère de fatigue doit être exprimé en fonction des contraintes microscopiques $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t)$ du cycle adapté du cristal. D'après l'équation (III.2.27), ces dernières sont reliées aux contraintes macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ par :

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) + \underline{\underline{\rho}}^* \qquad \text{(III.3.1)}$$

où $\underline{\underline{\rho}}^*$ est un champ indépendant du temps qui représente les contraintes résiduelles microscopiques dans l'état adapté. De plus, par définition de l'adaptation, ces contraintes $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t)$ doivent respecter à tout instant le critère de plasticité du cristal, soit :

$$f(\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t)) \leqslant 0 \ , \ \forall t \in T \ , \ t > t_o \qquad \text{(III.3.2)}$$

Le critère de fatigue microscopique est alors formulé de la manière suivante : il y a nucléation d'une fissure de fatigue dans un grain plastifié du volume $V(\underline{x})$ dès que la condition

$$g\left(\hat{\underline{\underline{\xi}}}(t)\right) \leqslant 0 \ , \ \forall t \in T \ , \ t > t_o \qquad \text{(III.3.3)}$$

est violée à un instant au moins du cycle adapté.

Puisque nous avions admis que non-nucléation équivalait à adaptation, pour un matériau standard la fonction g devrait être identique à la fonction f du critère de plasticité du cristal. Malheureusement, dans le cadre des hypothèses adoptées, une telle égalité conduirait à établir un critère de fatigue indépendant de la pression hydrostatique ce qui est contraire aux observations expérimentales. En effet, le critère de plasticité du cristal ne porte que sur le déviateur des contraintes microscopiques qui est indépendant de la pression macroscopique d'après les relations de passage adoptées. C'est pour remédier à ce problème que la fonction g est choisi à priori différente de f puisque dépendante de la pression.

En résumé, pour élaborer un critère de fatigue microscopique, il faut non seulement choisir le critère de plasticité du cristal (fonction f) mais aussi postuler la forme mathématique du critère (fonction g) et enfin se donner une méthode d'évaluation du champ résiduel $\underline{\rho}^*$ dans l'état adapté.

Nous allons tout d'abord présenter brièvement le critère proposé par Dang Van en 1973. Puis nous formulerons un nouveau critère, proche du précédent mais mieux adapté au calcul par ordinateur.

III.3.1 FORMULATION DU CRITERE

Dang Van [9], [10] admet que la fonction g est une combinaison linéaire de la cission $\hat{\tau}$ et de la pression $\hat{p}$, toutes deux quantités microscopiques. Le critère correspondant s'écrit donc :

$$\hat{\tau}(t) + a\hat{p}(t) \leqslant b \ , \ \forall t \in T \qquad \text{(III.3.4)}$$

où a et b sont des constantes du matériau. l'inégalité (III.3.4) constitue un contrôle instantané et local de l'état des contraintes microscopiques $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t)$. Ceci différencie radicalement le critère de Dang Van des critères traditionnels de fatigue qui proposent un contrôle global de quantités définies globalement sur le cycle des contraintes. Le critère (III.3.4) peut aussi s'écrire :

$$\max_{t \in T} \left[\hat{\tau}(t) + a\, \hat{p}(t) \right] \leqslant b \qquad \text{(III.3.5)}$$

Il faut maintenant évaluer l'état de contraintes adapté, c'est-à-dire des fonctions $\hat{\tau}$ et $\hat{p}$ liées aux contraintes macroscopiques par l'équation (III.3.1) et qui satisfont à tout instant le critère de plasticité du cristal, c'est-à-dire l'inégalité (III.3.2).

Nous savons (§ III.2.2) que la pression microscopique est égale à la pression macroscopique, ceci à tout instant d'un chargement macroscopique périodique.

$$\hat{p}(t) = p(t) = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \left(\underline{\underline{\Sigma}}(t) \right) \ , \ \forall t \in T \qquad \text{(III.3.6)}$$

Etant donné que $\hat{p}$ est identique à p, nous ne conserverons que la seconde des deux notations.

En revanche, le calcul de $\hat{\tau}(t)$ est moins évident. Dang Van a d'abord étudié le cas d'un chargement périodique proportionnel [9] en s'inspirant du modèle uniaxial de fatigue proposé par Orowan [61], puis a généralisé le calcul de $\hat{\tau}(t)$ pour un chargement affine ou général.

III.3.2 CAS DU CHARGEMENT PERIODIQUE PROPORTIONNEL

Dang Van suppose que le critère de plasticité du cristal (fonction f) découle de la loi de Schmid et qu'un seul système de glissement par grain est actif. Ce système est défini dans un repère fixe par sa matrice d'orientation

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left(n_i m_j + n_j m_i \right) \quad \text{(III.3.7)}$$

où $\underline{n}$ désigne la normale au plan de glissement et $\underline{m}$ la direction de glissement facile associée. Les contraintes σ_{ij} et les déformations plastiques ε^p_{ij} du cristal sont alors reliées au glissement plastique γ^p et à la cission τ agissant sur le plan de glissement :

$$\varepsilon^p_{ij} = \gamma^p \, a_{ij} \quad \text{(III.3.8)}$$

et

$$\tau = a_{ij} \, \sigma_{ij} \quad \text{(III.3.9)}$$

Puisque le volume $V(\underline{x})$ contient un grand nombre de cristaux d'orientations différentes, il est naturel d'admettre qu'il existe au moins un cristal dont le plan et la direction de glissement facile coïncident avec le plan et la direction de la cission macroscopique maximale. Rappelons que ces derniers sont fixes lors d'un chargement périodique proportionnel. Ainsi la matrice a_{ij} qui correspond au système de glissement actif du cristal est connue d'avance pour un tel chargement.

Le critère de plasticité découlant de la loi de Schmid s'écrit :

$$a_{ij}\,\sigma_{ij} - \tau_y \leqslant 0 \qquad \text{(III.3.10)}$$

En supposant que l'écrouissage du cristal est isotrope linéaire, l'évolution de la limite d'élasticité en cisaillement τ_y au cours d'un chargement périodique proportionnel est donnée par :

$$\tau_y(N) = \tau_{y,o} + g \sum_{i=1}^{N} \Delta\gamma_I^p \qquad \text{(III.3.11)}$$

où g est une constante, $\tau_{y,o}$ et $\tau_y(N)$ sont les limites d'élasticité initiale et actuelle et $\Delta\gamma_I^p = \left| \gamma_I^p - \gamma_{I-1}^p \right|$, γ_I^p étant le glissement plastique dans le cristal après i cycles.

Les relations de passage (équations III.2.27 et III.2.28) peuvent s'écrire :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} - 2\mu\,\varepsilon_{Ij}^p \qquad \text{(III.3.12)}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par a_{ij}, en tenant compte des équations (III.3.8) et (III.3.9) et en remarquant que $a_{ij}a_{ij} = \frac{1}{2}$, il vient :

$$\tau + \mu\gamma^p = a_{ij}\,\Sigma_{ij} \qquad \text{(III.3.13)}$$

où $a_{ij}\,\Sigma_{ij}$ n'est autre que la cission macroscopique C. Puisque la matrice impose sa déformation au cristal, la déformation de cisaillement macroscopique Γ est égale à son

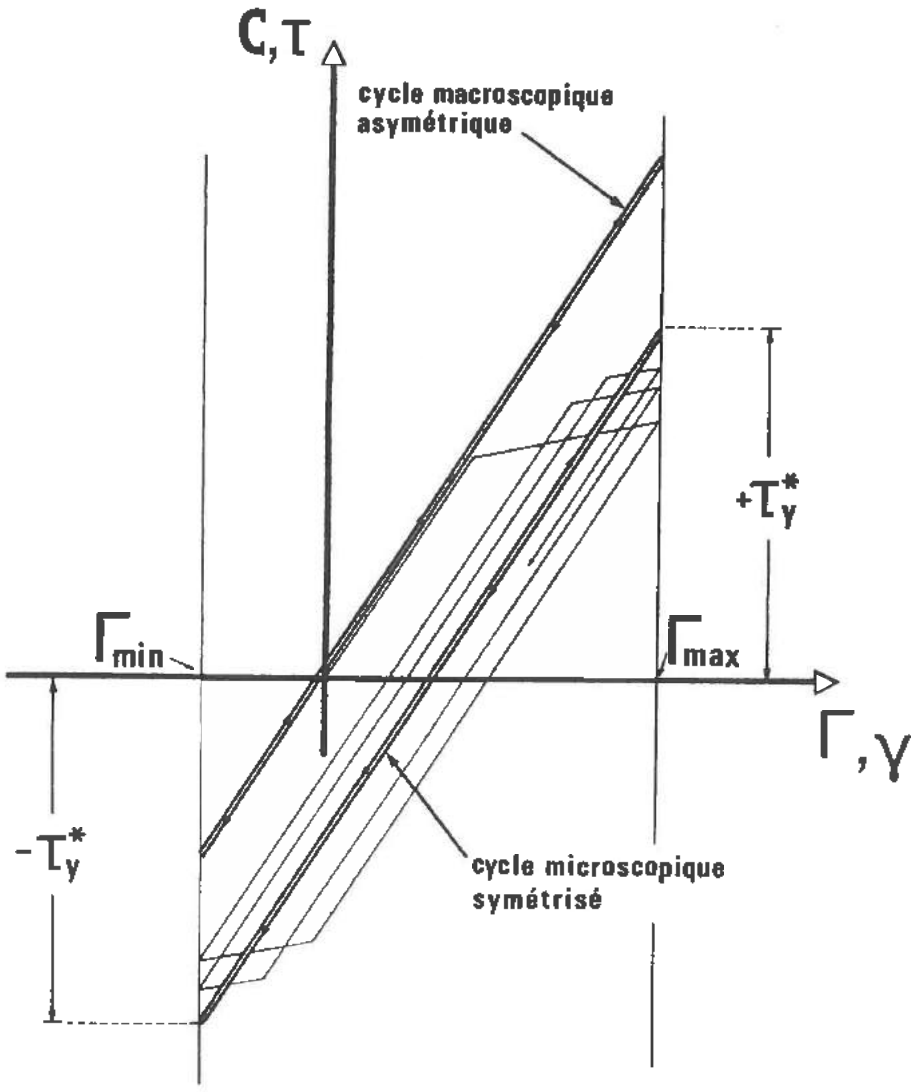


Figure III.6 Evolution de la cission macroscopique pour un cristal à écrouissage isotrope.

homologue microscopique γ . Nous pouvons donc, dans un même plan représenter l'évolution de la cission macroscopique C en fonction de Γ et l'évolution correspondante de τ en fonction de γ (Fig. III.6).

Il est possible de démontrer [9], qu'à l'adaptation, le cycle microscopique est symétrique. La cission microscopique τ varie alors entre les valeurs $+\tau_y^*$ et $-\tau_y^*$ où τ_y^* est la limite d'élasticité en cisaillement du cristal adapté. Il est alors facile de calculer les valeurs stabilisées γ_p^* et τ^* du glissement plastique et de la cission résiduelle microscopique :

$$\gamma_p^* = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{max} + \Gamma_{min} \right) = \Gamma_m \qquad \text{(III.3.14)}$$

et

$$\tau^* = - \mu \gamma_p^* = - \mu \Gamma_m \qquad \text{(III.3.15)}$$

Nous connaissons donc la valeur de la cission microscopique à tout instant du cycle adapté (voir équations III.3.13 et III.3.15) :

$$\hat{\tau}(t) = C(t) + \tau^* = C(t) - \mu \Gamma_m \qquad \text{(III.3.16)}$$

Or, $\mu\Gamma_m$ est aussi la valeur moyenne de la cission macroscopique, donc :

$$\hat{\tau}(t) = C(t) - C_m \qquad \text{(III.3.17)}$$

Les équations (III.3.6) et (III.3.17) nous permettent de passer des grandeurs microscopiques $\hat{\tau}$ (t) et $\hat{p}$(t), intervenant dans le critère de Dang Van (équation III.3.5) aux grandeurs macroscopiques, ceci dans le cas d'un chargement

proportionnel. L'hypothèse selon laquelle un seul système de glissement du cristal est actif, nous permet même de calculer complètement le tenseur microscopique des contraintes $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$ à l'adaptation, en combinant les équations (III.3.8), (III.3.12), (III.3.15) et le fait que $\mu\Gamma_m = C_m$:

$$\hat{\sigma}_{ij}(t) = \Sigma_{ij}(t) - 2a_{ij}\, C_m \qquad \text{(III.3.18)}$$

Cette relation montre que, dans le cas d'un chargement radial alterné ($\underline{\underline{\Sigma}}_m = 0 \Rightarrow C_m = 0$), les contraintes microscopiques sont identiques aux contraintes macroscopiques. Ceci nous permet d'identifier facilement les constantes a et b du critère à partir de deux essais.

- En torsion alternée, nous avons :

$\hat{\tau}(t) = \hat{\sigma}_{xy}(t) = \Sigma_{xy}(t) = t\sin\omega t$ et $p(t) = 0$, donc :

$$\max_{t\in T} [t \sin\omega t + a\cdot 0] \leqslant b \Rightarrow b = t \qquad \text{(III.3.19)}$$

- En flexion alternée, nous avons :

$$\hat{\tau}(t) = \frac{\hat{\sigma}_{xx}(t)}{2} = \frac{\Sigma_{xx}(t)}{2} = \frac{f}{2}\sin\omega t, \text{ et } p(t) = \frac{\Sigma_{xx}(t)}{3} = \frac{f}{3}\sin\omega t$$

d'où

$$\max_{t\in T}\left[\frac{f}{2}\sin\omega t + a\,\frac{f}{3}\sin\omega t \right] \leqslant b \Rightarrow a = \frac{t - \frac{f}{2}}{\frac{f}{3}} \qquad \text{(III.3.20)}$$

Il faut maintenant généraliser ce critère au cas des chargements périodiques affines ou quelconques.

III.3.3 CAS DU CHARGEMENT PERIODIQUE AFFINE OU GENERAL

La différence principale avec un chargement radial est que les directions principales du tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ ne sont plus fixes. La matrice d'orientation du glissement facile a_{ij} n'est donc pas connue d'avance et une nouvelle méthode de calcul de $\hat{\tau}$ a donc été proposée [11]. Cette fois-ci, le critère de plasticité du cristal est choisi de la forme :

$$\forall \underline{n} \ , \quad \| \underline{\tau}(\underline{n}) \| - \tau_y \leqslant 0 \qquad \text{(III.3.21)}$$

Remarquons que, pour un plan de normale $\underline{n}$ donnée, ce critère est un cercle de rayon τ_y centré à l'origine. En pratique, il est équivalent au critère directionnel découlant de la loi de Schmid dans la mesure où la répartition statistique des grains dans le volume élémentaire $V(\underline{x})$ fait que tout système de glissement $(\underline{n},\underline{m})$ est possible, i.e. :

$$\forall \underline{n} \ , \ \forall \underline{m} \perp \underline{n} \ , \ \frac{1}{2} (n_i m_j + n_j m_i) \sigma_{ij} - \tau_y \leqslant 0 \qquad \text{(III.3.22)}$$

ce qui est bien équivalent à la formulation (III.3.21) que nous avons adoptée.

Sur un plan de normale $\underline{n}$ donnée, le trajet de la cission macroscopique $\underline{C}(\underline{n},t)$ est une courbe fermée $\psi(\underline{n})$ ($\psi(\underline{n})$ est un segment de droite si le chargement est affine). Or, nous recherchons les contraintes résiduelles dans le cycle adapté, c'est-à-dire un tenseur fixe $\underline{\underline{\rho}}^*$ tel que les contraintes microscopiques $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) + \underline{\underline{\rho}}^*$ respectent à tout instant le critère de plasticité du cristal.

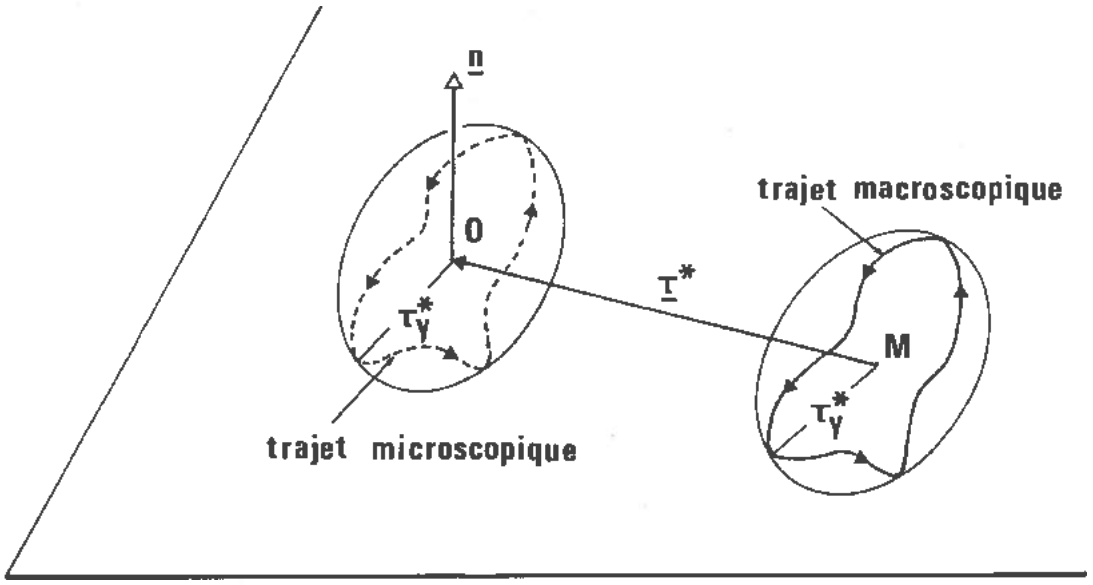


Figure III.7 "Symétrisation" de la cission microscopique

En réalité Dang Van choisit de construire la cission résiduelle $\underline{\tau}^*(\underline{n}) = \underline{\underline{\rho}}^* \cdot \underline{n}$ sur chaque plan de normale $\underline{n}$. Pour cela, il suppose que, dans ce plan, le critère de plasticité dans l'état adapté est un cercle centré à l'origine, de rayon $\tau_y^*(\underline{n})$, égal au rayon du plus petit cercle circonscrit à la courbe $\psi(\underline{n})$ (voir Fig. III.7). Ceci l'amène tout naturellement à prendre pour cission résiduelle $\underline{\tau}^*(\underline{n})$ le vecteur $\underline{MO}$, M étant le centre dudit cercle circonscrit (Fig. III.7). Il est facile de montrer qu'un tel choix de $\tau_y^*(\underline{n})$ et $\underline{\tau}^*(\underline{n})$ assure que la cission microscopique

$$\hat{\underline{\tau}}(\underline{n},t) = \underline{C}(\underline{n},t) + \underline{\tau}^*(\underline{n}) = \underline{C}(\underline{n},t) + \underline{MO} \qquad (III.3.23)$$

respecte le critère de plasticité dans l'état adapté, c'est-à-dire que :

$$\left\| \hat{\underline{\tau}}(\underline{n},t) \right\| - \tau_y^*(\underline{n}) = \| \underline{C}(\underline{n},t) + \underline{MO} \| - \tau_y^*(\underline{n}) \leqslant 0 \qquad (III.3.24)$$

à tout instant du cycle des contraintes (cf, figure III.7). Cette construction de la cission résiduelle de manière indépendante sur chaque plan est en général incompatible avec l'existence d'un tenseur $\underline{\underline{\rho}}^*$ tel que $\underline{\tau}^*(\underline{n}) = \underline{\underline{\rho}}^* \cdot \underline{n}$. Mais elle est légitime si l'on considère que ce sont des cristaux différents qui sont concernés lorsque l'orientation du plan varie.

Ainsi, le trajet de la cission microscopique est en quelque sorte "centré" sur l'origine. Dans le cas où le trajet de la cission macroscopique possède effectivement un centre de symétrie (cas des chargements affines par exemple), il s'agit alors d'une vraie symétrisation.

Le trajet de $\hat{\tau}(\underline{n},t)$ peut être déterminé pour toute normale $\underline{n}$. Nous pouvons donc appliquer le critère de fatigue microscopique (équation III.3.5) sous la forme suivante :

$$\max_{\underline{n}} \left\{ \max_{t} \left[\left\| \hat{\underline{\tau}}(\underline{n},t) \right\| + ap(t) \right] \right\} \leqslant b \qquad \text{(III.3.25)}$$

Ce calcul nécessite donc la recherche d'un double maximum (par rapport à $\underline{n}$ et à t) et, pour chaque normale $\underline{n}$, la construction du plus petit cercle circonscrit au trajet de $\underline{C}$ $(\underline{n};t)$ sur le plan correspondant. Malgré ces deux difficultés majeures, cette approche a été appliquée [11] avec, cependant, une construction incomplète du plus petit cercle circonscrit. Dans l'annexe nous établissons un théorème qui conduit à la construction correcte. La quantité de calculs due à la double maximisation est très pénalisante pour l'utilisation de ce critère pour des problèmes industriels. C'est dans le but de réduire les calculs qu'un nouveau critère va maintenant être proposé.

III-4 UN NOUVEAU CRITERE DE FATIGUE

Le caractère original de ce critère se manifeste tant au niveau de sa formulation mathématique, qu'au niveau de la méthode utilisée pour évaluer les contraintes résiduelles dans l'état adapté du cristal.

Après avoir présenté cette nouvelle méthode d'évaluation, nous montrerons qu'elle est en fait exacte dans le cas d'un chargement périodique radial sous certaines conditions en réalité peu restrictives. Puis nous donnerons la nouvelle formulation mathématique du critère et nous comparerons ce dernier avec les critères de Dang Van et Crossland.

III.4.I EVALUATION DES CONTRAINTES MICROSCOPIQUES RESIDUELLES DANS L'ETAT ADAPTE DU CRISTAL

Dang Van suppose que le cristal obéit à un critère de plasticité découlant de la loi de Schmid et que toutes les orientations possibles du cristal sont représentées dans le volume élémentaire $V(\underline{x})$. A partir de la même hypothèse et en nous appuyant sur une remarque de Novozhilov (**Novozhilov V.V.**, Theory of elasticity, Pergamon Press, London, 1961,

voir aussi § II.4.6), nous allons définir un critère de plasticité "équivalent" associé à un cristal "moyen". Selon Novozhilov, la moyenne quadratique du module de la cission, étendue à tous les plans passant par un même point est égale à la mesure de von Mises, à un facteur multiplicatif près. Par conséquent, si le volume $V(\underline{x})$ est composé de cristaux qui obéissent à un critère de plasticité découlant de la loi de Schmid et dont l'orientation suit une distribution aléatoire uniforme, il se comporte, en apparence, comme un matériau de von Mises. Donc nous pouvons et nous allons dorénavant considérer que le volume $V(\underline{x})$ est composé de cristaux "moyens" obéissant à un critère de plasticité de type von Mises. Nous avons tout simplement remplacé une distribution aléatoire uniforme de cristaux anisotropes (critère de plasticité découlant de la loi de Schmid), par une distribution de cristaux isotropes (critère de plasticité de von Mises), sans modifier le comportement macroscopique du volume élémentaire $V(\underline{x})$. Il nous reste encore à traduire au niveau du cristal "moyen", les écrouissages cinématique et isotrope décrits dans le § III.1.2.

Le critère de plasticité de von Mises pour le cristal s'écrit donc sous une forme classique

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) : (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) \leqslant k^2(b) \qquad \text{(III.4.1)}$$

où $\underline{\underline{s}}$ est le déviateur des contraintes microscopiques, k la limite d'élasticité en cisaillement et $\underline{\underline{a}}$ et b des paramètres d'écrouissage cinématique et isotrope respectivement. L'évolution des déformations plastiques est régie par l'application de la règle de normalité,

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda}(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) \quad , \quad \dot{\lambda} > 0 \qquad \text{(III.4.2)}$$

dans le cas de charge plastique :

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} > 0 \qquad \text{(III.4.3)}$$

En revanche dans le cas de décharge

$$f < 0 \quad \text{ou} \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \leqslant 0 \qquad \text{(III.4.4)}$$

nous avons $\dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = 0$. Nous admettons que l'écrouissage cinématique est de la forme

$$\underline{\underline{a}} = c\underline{\underline{\varepsilon}}^p \Rightarrow \dot{\underline{\underline{a}}} = c\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \quad , \quad c > 0 \qquad \text{(III.4.5)}$$

et que la loi d'évolution de l'écrouissage isotrope est donnée par :

$$\dot{k} = g\dot{b} \quad , \quad g > 0 \qquad \text{(III.4.6)}$$

où

$$b = \int \| \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \| \, d\tau = \int \sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p} \, d\tau \qquad \text{(III.4.7)}$$

Compte tenu des relations de passage à l'échelle microscopique (équation III.2.29), le critère de plasticité du cristal (équation III.4.1) s'écrit aussi :

$$\frac{1}{2} (\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\rho}} - \underline{\underline{a}}) : (\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\rho}} - \underline{\underline{a}}) - k^2(b) \leqslant 0 \qquad \text{(III.4.8)}$$

où $\underline{\underline{S}}$ est le déviateur des contraintes macroscopiques et $\underline{\underline{\rho}}$ le déviateur des contraintes microscopiques résiduelles.

Rappelons que nous nous intéressons au comportement asymptotique de ce cristal soumis à un chargement périodique. Plus précisément, nous recherchons, s'il existe, l'état adapté. Pour cela, nous allons faire appel à l'extension du théorème d'adaptation de Melan (**E. Melan**, "Zur Plastizität des raümlichen Kontinuums, Ing. Arch., 9, 1938), dans le cas des matériaux écrouissables à écrouissage positif. Cette extension établie par Mandel [46], [47], et par Mandel, Zarka, Halphen [48], est ici brièvement présentée sous sa dernière forme [48].

Soit une structure constituée d'un matériau élasto-plastique standard dont le domaine d'élasticité est défini par :

$$f(\underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{A}}) \leqslant K^2(B) \qquad \text{(III.4.9)}$$

où B est une fonction croissante du temps ($\dot{B} \geqslant 0$) et $\underline{\underline{A}}$ sont les paramètres d'écrouissage cinématique $\left(\underline{\underline{A}} = C\underline{\underline{E}}^p,\ C \text{ scalaire positif}\right)$. Soit $\underline{\underline{\Sigma}}^{e\ell}$ la réponse en contraintes de la structure calculée dans l'hypothèse où le milieu reste purement élastique. Dans le cas d'un chargement périodique, $\underline{\underline{\Sigma}}^{e\ell}(t)$ est connu à chaque instant t de la période T de chargement. Le théorème d'adaptation s'énonce alors comme suit :

Théorème d'adaptation

S'il existe un instant t_o ainsi que deux champs fixes de tenseurs $\underline{\underline{R}}^*(\underline{x})$ (contraintes résiduelles) et $\underline{\underline{E}}^{p^*}(\underline{x})$ (déformations plastiques) et un champ scalaire fixe $B^*(\underline{x})$ (variable d'écrouissage isotrope) tels que :

$$\forall \underline{x}\ ,\ \forall t>t_o,\ f\left[\underline{\underline{\Sigma}}^{e\ell}(\underline{x},t)+\underline{\underline{R}}^*(\underline{x})-C\underline{\underline{E}}^{p^*}(\underline{x})\right]\leqslant K^2\left(B^*(\underline{x})\right) \quad \text{(III.4.10)}$$

alors la structure s'adaptera pourvu que les trois conditions suivantes soient satisfaites :

- f est une fonction homogène de degré pair.

- K est une fonction non décroissante de B.

- $\underline{\underline{E}}^{p^*}$, B^* et $\underline{\underline{L}}^{-1} : \left(\underline{\underline{R}}^* - \underline{\underline{R}}_o\right)$ sont suffisamment petits. $\underline{\underline{L}}^{-1}$ est la matrice des complaisances élastiques et $\underline{\underline{R}}_o$ le champ initial des contraintes résiduelles.

Avant d'appliquer ce théorème au problème du cristal plastifié, regardons plus précisément comment se traduisent les différentes conditions requises :

- La fonction f de l'équation (III.4.9), est, dans le cas du cristal "moyen", homogène de degré pair (= 2), puisque nous avons choisi un critère de type de von Mises pour ce cristal (voir équation III.4.1).

- L'écrouissage isotrope choisi (équations III.4.6 et III.4.7) est tel que k est une fonction strictement croissante de la variable b.

- La condition de petitesse de B^* peut être remplacée par une condition de proximité de $k(b^*) = k^*$ et de k_o, valeur initiale de k.

- Les contraintes résiduelles microscopiques $\underline{\underline{\rho}}$ sont reliées aux déformations plastiques microscopiques par la relation $\underline{\underline{\rho}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^p = -2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ où $\underline{\underline{L}}$ est le tenseur d'élas-

ticité commun au cristal et à l'agrégat polycristallin de volume $V(\underline{x})$. Si nous admettons en outre, qu'il n'y a pas de contraintes résiduelles initiales ($\underline{\underline{\rho}}_o = 0$), les conditions de petitesse de $\underline{\underline{L}}^{-1} : \left(\underline{\underline{\rho}}^* - \underline{\underline{\rho}}_o \right)$ et de $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ sont équivalentes puisqu'alors $\underline{\underline{L}}^{-1} : \left(\underline{\underline{\rho}}^* - \underline{\underline{\rho}}_o \right) = \underline{\underline{L}}^{-1} : \underline{\underline{\rho}}^* = \underline{\underline{\varepsilon}}^{p^*}$.

- l'écrouissage cinématique choisi est tel que $\underline{\underline{a}} = c\ \underline{\underline{\varepsilon}}^p$. Grâce aux changements de variables

$$\underline{\underline{z}} = -\underline{\underline{\rho}} + \underline{\underline{a}} \Rightarrow \underline{\underline{z}} = (2\mu + c)\ \underline{\underline{\varepsilon}}^p \qquad \text{(III.4.11)}$$

le critère de plasticité du cristal s'écrit :

$$\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{z}} \right) : \left(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{z}} \right) \leqslant k^2(b) \qquad \text{(III.4.12)}$$

et la condition de petitesse de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{p^*}$ est équivalente à la condition de petitesse de $\underline{\underline{z}}^* = (2\mu + c)\underline{\underline{\varepsilon}}^{p^*}$.

- Enfin, nous avons montré que les contraintes microscopiques $\underline{\underline{\sigma}}^{e\ell}$ calculées dans l'hypothèse où le milieu reste purement élastique, sont directement égales aux contraintes macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}$. Ceci est également vrai pour les parties déviatoriques $\left(\underline{\underline{s}}^{e\ell} = \underline{\underline{S}} \right)$, (voir § III.2.2).

Dans le cas du cristal soumis à un chargement périodique, le théorème d'adaptation s'énonce donc de la façon suivante :

S'il existe un instant t_o, ainsi qu'un tenseur $\underline{\underline{z}}^*$ fixe et une valeur k^* de la limite d'élasticité du cristal indépendante du temps, tels que

$$\forall t>0\ ,\ \frac{1}{2}\left[\left(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}^* \right) : \left(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}^* \right) \right] < (k^*)^2 \qquad \text{(III.4.13)}$$

alors le cristal s'adapte, pourvu que $\underline{\underline{z}}^*$ soit suffisamment

petit et que k^* soit suffisamment proche de sa valeur initiale k_o.

S'il y a effectivement adaptation, les valeurs réelles de $\underline{\underline{z}}^*$ et k^* peuvent être approchées à l'aide d'un calcul élastoplastique incrémental. Cependant, nous préférons donner une méthode simple d'évaluation d'un couple $(\underline{\underline{z}}^*, k^*)$ qui satisfait le théorème d'adaptation, mais qui ne décrit pas forcément l'état réel du cristal dans son état adapté. Toutefois, nous vérifierons qu'il s'agit de la solution exacte dans le cas d'un chargement radial, pour lequel il est possible d'effectuer analytiquement le calcul incrémental. Il est donc raisonnable de penser que, dans le cas d'un chargement périodique général, nous obtiendrons une bonne approximation de l'état adapté.

Cette méthode d'évaluation est fondée sur l'interprétation géométrique du critère de von Mises. Dans l'espace des déviateurs des contraintes macroscopiques $\underline{\underline{S}}$, le critère de plasticité du cristal "moyen" (équation III.4.12) est une hypersphère de rayon $\sqrt{2}\,k$ centrée en $\underline{\underline{z}}$ ($\underline{\underline{z}}$ est un déviateur puisque $\underline{\underline{z}} = (2\mu + c)\,\underline{\underline{\varepsilon}}^p$). Dans ce même espace, le trajet représentatif d'un chargement périodique est une courbe fermée Φ'. Il existe donc une infinité de couples $(\underline{\underline{z}}', k')$ pour lesquels l'inégalité (III.4.13) du théorème d'adaptation est satisfaite. Il suffit de fixer arbitrairement un déviateur $\underline{\underline{z}}'$ puis de choisir k' suffisamment grand pour que la courbe Φ' soit à l'intérieur de l'hypersphère de centre $\underline{\underline{z}}'$ et de rayon $\sqrt{2}\,k'$ (voir Fig. III.8), i.e. :

$$\sqrt{2}\,k' \geqslant \max_{t\in T} \sqrt{[\,\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}'\,]:[\,\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}'\,]} \qquad \text{(III.4.14)}$$

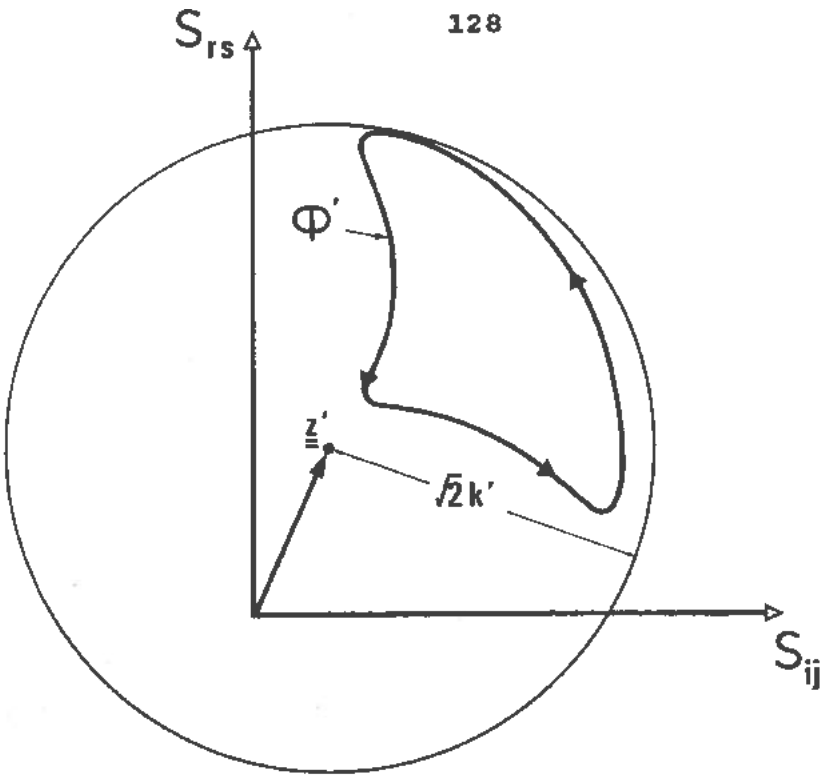


Figure III.8 Choix d'un couple ($\underline{\underline{z}}'$,k') satisfaisant l'inégalité du théorème d'adaptation.

Pour qu'il y aît effectivement adaptation, il faut aussi que $\underline{\underline{z}}'$ soit suffisamment petit et que k' soit proche de la valeur initiale k_o . Nous devons donc choisir, parmi tous ces couples ($\underline{\underline{z}}'$,k') possibles, un couple optimum $\left(\underline{\underline{z}}^*,k^*\right)$. Pour cela nous allons suivre la démarche Mandel, Zarka, Halphen [48].

La quantité Q($\underline{\underline{z}}'$,t) définie par,

$$Q(\underline{\underline{z}}', t) = \sqrt{[\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}'] : [\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}']} \qquad \text{(III.4.15)}$$

est une mesure de l'écart entre le déviateur des contraintes macroscopiques $\underline{\underline{S}}(t)$ $\left(\text{qui est égal à } \underline{\underline{s}}^{e\ell}(t)\right)$ et le point fixe $\underline{\underline{z}}'$. Nous prenons le maximum de cet écart pour $t > t_o$, puis nous faisons varier $\underline{\underline{z}}'$ de manière à minimiser ce maximum. Nous obtenons ainsi un point $\underline{\underline{z}}^*$ de

moindre écart maximal pour $t > t_o$ c'est-à-dire tel que

$$\max_{t>t_o} \sqrt{\left[\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{z}}^*\right]:\left[\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{z}}^*\right]} = \min_{\underline{\underline{z}}'}\left\{ \max_{t>t_o} \sqrt{[\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{z}}']:[\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{z}}']} \right\} \qquad \text{(III.4.16)}$$

La quantité

$$Q\left(\underline{\underline{z}}^*, t_o \right) = \max_{t>t_o} \sqrt{\left[\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{z}}^*\right]:\left[\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{z}}^*\right]} \qquad \text{(III.4.17)}$$

s'appelle fluctuation de la solution élastique pour $t > t_o$ [48]. Nous choisissons donc le couple $\left(\underline{\underline{z}}^*,k^*\right)$ tel que $\underline{\underline{z}}^*$ soit la solution du problème de min-max suivant :

$$\boxed{\underline{\underline{z}}^* : \min_{\underline{\underline{z}}'} \left\{ \max_{t>t_o} \sqrt{[\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{z}}']:[\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{z}}']} \right\}} \qquad \text{(III.4.18)}$$

et $\sqrt{2}\ k^*$ soit égal à la fluctuation élastique i.e. :

$$\boxed{k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\, Q\left(\underline{\underline{z}}^*, t_o \right)} \qquad \text{(III.4.19)}$$

Le couple $\left(\underline{\underline{z}}^*,k^*\right)$ a une interprétation géométrique simple : $\underline{\underline{z}}^*$ et $\sqrt{2}\ k^*$ sont respectivement le centre et le rayon de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet Φ' du déviateur des contraintes macroscopiques $\underline{\underline{S}}(t)$ (Fig. III.9) et dont la recherche se traduit précisément par le problème de min-max (équation III.4.18)

Mais pour que ce couple $\left(\underline{\underline{z}}^*,k^*\right)$ satisfasse effectivement le théorème d'adaptation, il faut encore s'assurer de la petitesse de $\underline{\underline{z}}^*$ et de la proximité de k^* et k_o. Il n'est pas possible de le savoir à priori, c'est-à-dire sans connaître le trajet de chargement. Néanmoins, nous pouvons

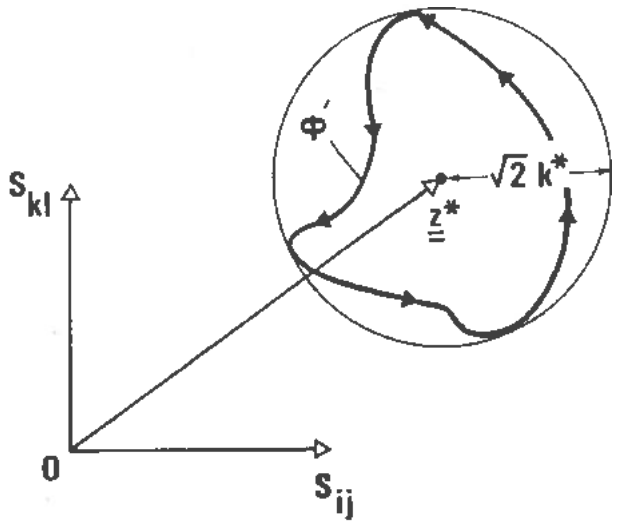


Figure III.9 Choix optimum du couple $\left(\underline{\underline{z}}^*, k^*\right)$ par la construction de la plus petite hypersphère circonstrite à Φ'.

affirmer que la valeur k^* ainsi obtenue est la plus petite parmi celles qui vérifient l'inégalité (III.4.13) du théorème d'adaptation. Ceci résulte directement de la définition de $\sqrt{2}\ k^*$ comme rayon de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet Φ'. En pratique, k_o étant faible k^* lui sera toujours supérieur puisque comparable à l'amplitude du chargement . En adoptant cette valeur k^*, nous avons donc choisi en priorité, de minimiser la distance entre k_o et k^*. En remarquant que $\underline{\underline{z}}^*$ est comparable au chargement moyen, il suffira de s'assurer que ce dernier n'est pas trop grand, pour que le théorème

d'adaptation soit vérifié. Une fois $\underline{\underline{z}}^*$ déterminé, les valeurs de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{p^*}$ et $\underline{\underline{\rho}}^*$ s'en déduisent immédiatement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{p^*} = \frac{1}{2\mu+c}\,\underline{\underline{z}}^* \qquad \text{(III.4.20)}$$

et

$$\underline{\underline{\rho}}^* = \frac{-2\mu}{2\mu+c}\,\underline{\underline{z}}^* \qquad \text{(III.4.21)}$$

Les contraintes microscopiques du cycle adapté sont alors données par :

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t)=\underline{\underline{\Sigma}}(t)+\underline{\underline{\rho}}^* \;\Rightarrow\; \hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t)=\underline{\underline{\Sigma}}(t)-\frac{2\mu}{2\mu+c}\,\underline{\underline{z}}^* \qquad \text{(III.4.22)}$$

Finalement notre évaluation de l'état adapté du cristal se ramène, comme nous l'avons déjà dit, à la recherche de la plus petite hypersphère circonscrite à la courbe Φ' décrite par $\underline{\underline{S}}(t)$. En pratique la courbe Φ' sera approchée par un polygone. Dans l'Annexe, nous établissons un théorème qui nous permet d'élaborer un algorithme de construction de la plus petite sphère circonscrite.

Remarquons que dans le cas d'un chargement proportionnel ou affine, l'évaluation de $\left(\underline{\underline{z}}^*, k^*\right)$ est immédiate. Le trajet Φ' du chargement dans l'espace des déviateurs est alors un segment de droite AB (voir Fig.III.10).

Le centre et le rayon de la plus petite hypersphère circonscrite à un segment sont respectivement le milieu et la demi-longueur dudit segment. Si $\underline{\underline{S}}^A$ et $\underline{\underline{S}}^B$ désignent les déviateurs des contraintes macroscopiques associés aux extrêmités A et B du trajet Φ', nous avons donc :

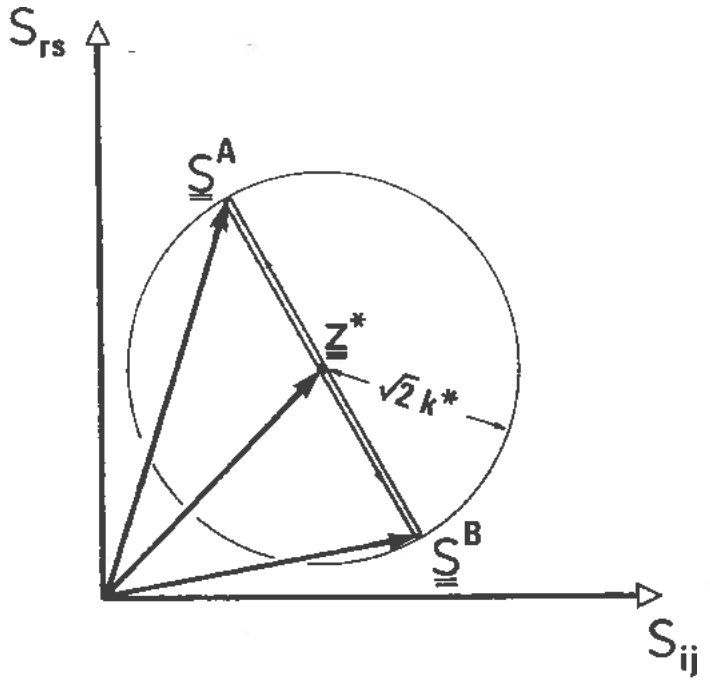


Figure III.10 Construction de la plus petite hypersphère, pour un chargement à trajet affine ou proportionnel.

$$\underline{\underline{z}}^* = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{S}}^A + \underline{\underline{S}}^B\right) = \underline{\underline{S}}_m \qquad \text{(III.4.23)}$$

et

$$\sqrt{2}\ k^* = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\underline{\underline{S}}^A - \underline{\underline{S}}^B\right) : \left(\underline{\underline{S}}^A - \underline{\underline{S}}^B\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta\underline{\underline{S}} : \Delta\underline{\underline{S}}} \qquad \text{(III.4.24)}$$

D'après l'équation (III.4.22) les contraintes microscopiques du cycle adapté sont :

$$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) - \frac{2\mu}{2\mu + c}\,\underline{\underline{S}}_m \qquad \text{(III.4.25)}$$

Nous sommes donc actuellement en mesure d'évaluer les contraintes microscopiques dans l'état adapté du cristal soumis à un chargement périodique quelconque. Ainsi que nous l'avions annoncé, nous allons maintenant nous assurer qu'il s'agit, en général, de la solution exacte dans le cas d'un chargement périodique à trajet radial.

III.4.2 CAS DU CHARGEMENT PERIODIQUE RADIAL : SOLUTION EXACTE POUR L'ETAT ADAPTE DU CRISTAL

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que notre méthode d'évaluation de l'état adapté du cristal soumis à un chargement périodique affine conduit à choisir une limite d'élasticité k^* et un état résiduel $\underline{\underline{\rho}}^*$ tels que :

$$k^* = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\Delta\underline{\underline{S}} : \Delta\underline{\underline{S}}} = \frac{\| \Delta\underline{\underline{S}} \|}{2\sqrt{2}} \qquad \text{(III.4.26)}$$

et

$$\underline{\underline{\rho}}^* = - \frac{2\mu}{2\mu + c}\,\underline{\underline{S}}_m \qquad \text{(III.4.27)}$$

Ce choix est à fortiori le même dans le cas d'un chargement radial pour lequel nous allons maintenant effectuer le calcul élastoplastique incrémental qui nous permettra de prouver que ce couple $\left(\underline{\underline{\rho}}^*, k^*\right)$ décrit, en fait, l'état adapté réel.

Rappelons que le cristal obéit au critère de von Mises avec écrouissage cinématique et isotrope :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}):(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) - k^2(b) \leqslant 0 \qquad \text{(III.4.28)}$$

où

$$\underline{\underline{a}} = c\underline{\underline{\varepsilon}}^p \Rightarrow \dot{\underline{\underline{a}}} = c\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \quad , \quad c > 0 \qquad \text{(III.4.29)}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} b=\int \sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p}\, d\tau \\ \dot{k} = g\, \dot{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{k} = g\sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p} \quad , \quad g > 0 \qquad \text{(III.4.30)}$$

L'évolution des déformations plastiques microscopiques est régie par la règle de normalité :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda}\,(\,\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}\,) \qquad \text{(III.4.31)}$$

où $\dot{\lambda}$ est un scalaire non négatif appelé multiplicateur plastique. Nous distinguons deux cas suivant qu'il y a évolution ou non des déformations plastiques :

- <u>Charge plastique</u>

$$\dot{\lambda} > 0 \quad \text{si} \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} > 0 \qquad \text{(III.4.32)}$$

- <u>Décharge</u>

$$\dot{\lambda}=0 \quad \text{si} \quad f<0 \quad \text{ou si} \quad f=0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \leqslant 0 \qquad \text{(III.4.33)}$$

L'équation qui permet de calculer la valeur de $\dot{\lambda}$ lorsqu'il y a charge plastique est :

$$\dot{f} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{a}}} : \dot{\underline{\underline{a}}} + \frac{\partial f}{\partial k} \dot{k} = 0 \qquad \text{(III.4.34)}$$

En tenant compte des équations (III.4.28), (III.4.29) et (III.4.30), nous obtenons alors :

$$\dot{\lambda} = \frac{(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) : \dot{\underline{\underline{s}}}}{2(c + \sqrt{2}\, g)\, k^2} \qquad \text{(III.4.35)}$$

La limite d'élasticité du cristal à l'instant t est donnée par :

$$k = k_o + g \int_0^t \sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p}\, d\tau \qquad \text{(III.4.36)}$$

où k_o est la limite d'élasticité initiale. Nous cherchons donc à calculer la limite de k, si elle existe, lorsque t tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque le nombre de cycles N du chargement cyclique radial de période T, tend vers l'infini, soit :

$$\lim_{t\to\infty} k = k_o + g \lim_{N\to\infty} \int_0^{NT} \sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p}\, d\tau \qquad \text{(III.4.37)}$$

Dans le paragraphe (III.2.2), nous avions établi les relations suivantes :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\rho}} \qquad \text{(III.4.38)}$$

et

$$\underline{\underline{\rho}} = - 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}^p \qquad \text{(III.4.39)}$$

qui, après dérivation, conduisent à :

$$\dot{\underline{\underline{s}}} = \dot{\underline{\underline{S}}} - 2\mu\, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \qquad \text{(III.4.40)}$$

Or, la valeur de $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p$ est donnée par la règle de normalité (équation III.4.31), donc :

$$\dot{\underline{\underline{s}}} = \dot{\underline{\underline{S}}} - 2\mu\,\dot{\lambda}\,(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) \qquad \text{(III.4.41)}$$

La relation (III.4.41) permet d'éliminer $\dot{\underline{\underline{s}}}$ dans l'expression (III.4.35) du multiplicateur plastique et d'obtenir ainsi :

$$\dot{\lambda} = \frac{(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) : \dot{\underline{\underline{S}}}}{2(c + 2\mu + \sqrt{2}\,g)\,k^2} \qquad \text{(III.4.42)}$$

Les vitesses de déformations plastiques s'en déduisent immédiatement (équations (III.4.31) et (III.4.42)) :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{\left[(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) : \dot{\underline{\underline{S}}}\right](\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}})}{2A\,k^2} \qquad \text{(III.4.43)}$$

avec

$$A = c + 2\mu + \sqrt{2}\,g \qquad \text{(III.4.44)}$$

Lors d'un chargement à trajet radial les tenseurs $\underline{\underline{S}}$ et $\dot{\underline{\underline{S}}}$ sont proportionnels. Supposons qu'il en est de même pour $\underline{\underline{s}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ (cette hypothèse sera confirmée à posteriori par la construction pas à pas de la solution qui est unique en vitesses). Les relations (III.4.38) et (III.4.39) montrent que $\underline{\underline{s}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ sont proportionnels à $\underline{\underline{S}}$ et donc que $\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{s}} - c\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ est proportionnel à $\dot{\underline{\underline{S}}}$. Dans ce cas, on montre aisément que :

$$\left[(\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}}):\dot{\underline{\underline{S}}}\right](\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}}) = [(\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}}):(\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}})]\,\dot{\underline{\underline{S}}} \qquad \text{(III.4.45)}$$

Compte tenu de cette égalité et du fait que, pendant la charge plastique le critère est atteint $\left((\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}}):(\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}}) = 2k^2\right)$, l'équation (III.4.43) devient :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{\dot{\underline{\underline{S}}}}{A} \quad \text{soit} \quad d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{d\underline{\underline{S}}}{A} \qquad \text{(III.4.46)}$$

L'évolution de la limite d'élasticité du cristal (équation III.4.30) est alors donnée par :

$$\dot{k} = \frac{g}{A}\sqrt{\dot{\underline{\underline{S}}} : \dot{\underline{\underline{S}}}} \quad \text{soit} \quad dk = \frac{g}{A}\sqrt{d\underline{\underline{S}} : d\underline{\underline{S}}} \qquad \text{(III.4.47)}$$

Pour décrire l'évolution de l'état du cristal, nous allons adopter une représentation géométrique. Dans l'espace des déviateurs des contraintes macroscopiques, le trajet de charge est représenté par un segment AB d'une droite passant par l'origine. Les états extrêmes $\underline{\underline{S}}_A$ et $\underline{\underline{S}}_B$ ont été choisis de manière à ce que (Fig. III.11) :

$$\sqrt{\underline{\underline{S}}_A : \underline{\underline{S}}_A} > \sqrt{\underline{\underline{S}}_B : \underline{\underline{S}}_B} \quad \Rightarrow \quad \| \underline{\underline{S}}_A \| > \| \underline{\underline{S}}_B \| \qquad \text{(III.4.48)}$$

Si le chargement n'est pas identiquement nul, $\|\underline{\underline{S}}_A\|$ est strictement positif et nous pouvons définir le tenseur $\underline{\underline{e}}$ qui est en quelque sorte le "tenseur directeur" du chargement, par : (Fig. III.11)

$$\underline{\underline{e}} = \frac{\underline{\underline{S}}_A}{\| \underline{\underline{S}}_A \|} \qquad \text{(III.4.49)}$$

$\underline{\underline{S}}$ et $\dot{\underline{\underline{S}}}$ sont proportionnels à $\underline{\underline{e}}$ de même que $\underline{\underline{s}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$. De plus, par définition de $\Delta\underline{\underline{S}}$ nous avons aussi :

$$\Delta\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_A - \underline{\underline{S}}_B = \| \Delta\underline{\underline{S}} \| \, \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.50)}$$

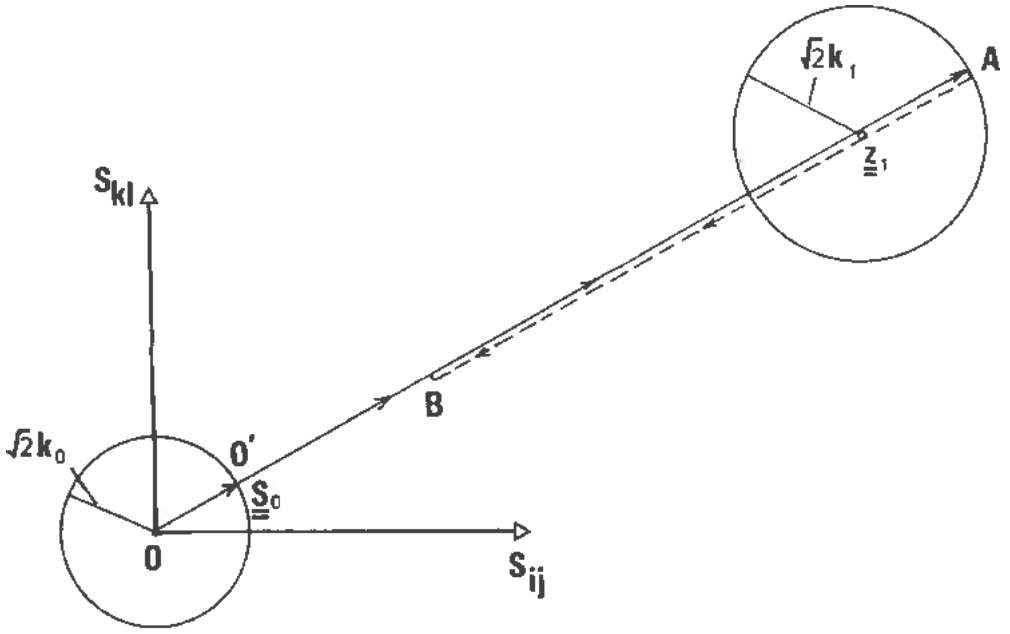


Figure III.11 Evolution de la surface de plasticité du cristal lors de la première mise en charge (trajet O → A).

La surface de plasticité initiale du cristal est une sphère de rayon $\sqrt{2}\ k_o$, centrée à l'origine (Fig. III.11). En tenant compte de la relation de passage $\left(\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{S}} - 2\mu\ \underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)$ et en utilisant le changement de variables $\underline{\underline{z}} = (c + 2\mu)\ \underline{\underline{\varepsilon}}^p$ le critère de plasticité du cristal à un instant quelconque est de la forme :

$$\sqrt{(\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{z}}):(\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{z}})} \leqslant \sqrt{2}\ k \ \Rightarrow\ \|\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{z}}\| \leqslant \sqrt{2}\ k \qquad \text{(III.4.51)}$$

Sa représentation dans l'espace des déviateurs des contraintes macroscopiques est donc une sphère de rayon $\sqrt{2}\ k$ centrée en $\underline{\underline{z}} = (c + 2\mu)\underline{\underline{\varepsilon}}^p$. Le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ étant, par hypo-

thèse, proportionnel à $\underline{\underline{e}}$, nous en déduisons que, lors d'un chargement radial, le centre $\underline{\underline{z}}$ de la sphère représentant le critère de plasticité du cristal, appartient toujours à la droite qui porte le trajet de charge AB.

Nous allons maintenant résoudre complètement le problème élastoplastique en étudiant successivement chaque demi-cycle de charge. Examinons tout d'abord, la première mise en charge du cristal. L'état $\underline{\underline{S}}$ des contraintes macroscopiques croît de $\underline{\underline{O}}$ à $\underline{\underline{S}}_A$ (trajet O → A, Fig. III.11). Deux configurations sont possibles. Soit $\underline{\underline{S}}_A$ se trouve à l'intérieur du domaine d'élasticité initial, i.e. $\|\underline{\underline{S}}_A\| < \sqrt{2}\, k_o$, auquel cas le comportement est élastique et le reste durant les cycles suivants puisque, $\|\underline{\underline{S}}_B\|$ étant inférieur à $\|\underline{\underline{S}}_A\|$, c'est tout le trajet de chargement qui est contenu dans la sphère de rayon $\sqrt{2}\, k_o$ centrée en O. En pratique, ce cas est exclu puisque la limite d'élasticité initiale du cristal k_o est petite devant le module de la variation du déviateur macroscopique $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|$ qui est ici inférieur à $2\|\underline{\underline{S}}_A\|$. Nous supposerons donc désormais que $\|\underline{\underline{S}}_A\| > 2\sqrt{2}\, k_o$. Le comportement est alors élastique jusqu'à ce que le point représentatif $\underline{\underline{S}}$ atteigne la frontière du critère initial (point O' sur la figure III.11), c'est-à-dire pour une valeur $\underline{\underline{S}}_o$ de $\underline{\underline{S}}$ telle que :

$$\| \underline{\underline{S}}_o \| = \sqrt{2}\, k_o \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{S}}_o = \sqrt{2}\, k_o\, \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.52)}$$

A partir de cet instant et jusqu'à ce que $\underline{\underline{S}}$ atteigne $\underline{\underline{S}}_A$, le cristal reste en charge plastique. Par conséquent, d'après la relation (III.4.47) la limite d'élasticité du cristal au point A est :

$$k_1 = k_o + \frac{g}{A} \int_{\underline{\underline{S}}_o}^{\underline{\underline{S}}_A} \sqrt{d\underline{\underline{S}} : d\underline{\underline{S}}} = k_o + \frac{g}{A} \|\underline{\underline{S}}_A - \underline{\underline{S}}_o\| \qquad \text{(III.4.53)}$$

En remarquant que

$$\underline{\underline{S}}_A - \underline{\underline{S}}_o = \left(\|\underline{\underline{S}}_A\| - \sqrt{2} k_o \right) \underline{\underline{e}} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{\underline{S}}_A - \underline{\underline{S}}_o\| = \|\underline{\underline{S}}_A\| - \sqrt{2} k_o \qquad \text{(III.4.54)}$$

on obtient

$$k_1 = k_o + \frac{g}{A} \left(\|\underline{\underline{S}}_A\| - \sqrt{2}\, k_o \right) \qquad \text{(III.4.55)}$$

D'après la relation (III.4.46), les déformations plastiques valent alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_1^p = \frac{1}{A} \int_{\underline{\underline{S}}_o}^{\underline{\underline{S}}_A} d\underline{\underline{S}} = \frac{1}{A} (\underline{\underline{S}}_A - \underline{\underline{S}}_o) = \frac{1}{A} \left(\|\underline{\underline{S}}_A\| - \sqrt{2}\, k_o \right) \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.56)}$$

Le domaine d'élasticité du cristal à la fin de cette première mise en charge est donc une sphère de rayon k_1 centrée au point $\underline{\underline{z}}_1$:

$$\underline{\underline{z}}_1 = (2\mu + c)\, \underline{\underline{\varepsilon}}_1^p = \frac{2\mu + c}{A} \left(\|\underline{\underline{S}}_A\| - \sqrt{2}\, k_o \right) \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.57)}$$

Nous allons maintenant étudier le premier demi-cycle de chargement (trajet A → B sur la figure III.12). Nous avons à nouveau deux configurations possibles:
Si $\underline{\underline{S}}_B$ se trouve à l'intérieur de la sphère de rayon $\sqrt{2}\, k_1$, centrée en $\underline{\underline{z}}_1$, i.e. $\|\Delta\underline{\underline{S}}\| \leqslant 2\sqrt{2}\, k_1$, le comportement est élastique et le reste durant les cycles suivants. En pratique, ce cas est exclu car le module d'écrouissage g est faible devant le second coëfficient de Lamé μ.

En effet, nous savons que :

$$k_1 = k_o + \frac{g}{A} \left(\|\underline{\underline{S}}_A\| - \sqrt{2}\, k_o \right) < k_o + \frac{g}{A} \|\underline{\underline{S}}_A\| < k_o + \frac{2g}{A} \|\Delta\underline{\underline{S}}\| \qquad \text{(III.4.58)}$$

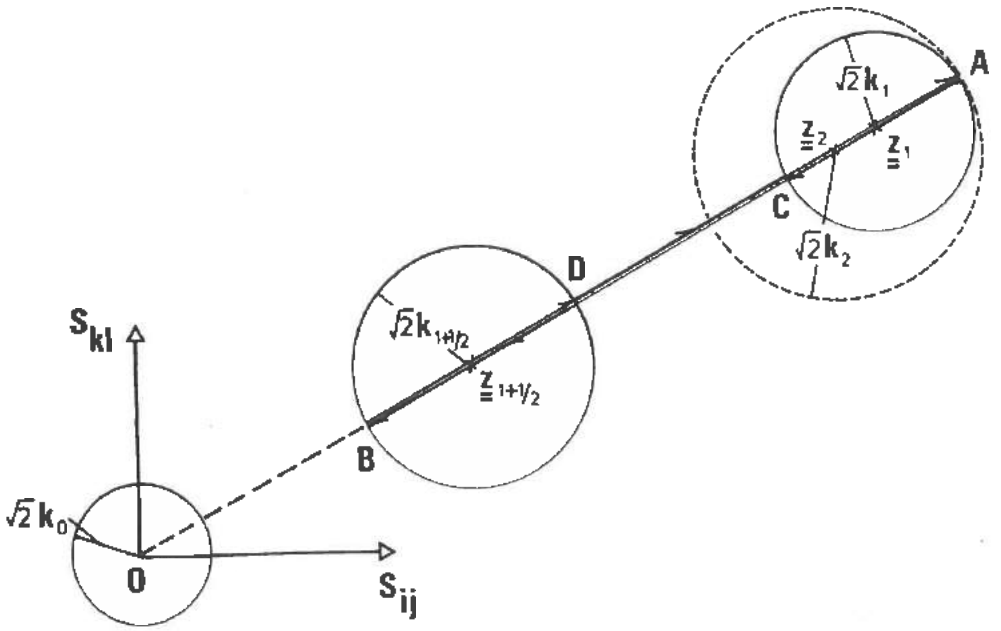


Figure III.12 Evolution du domaine d'élasticité du cristal lors du premier cycle de charge ($\underline{\underline{S}}_A \rightarrow \underline{\underline{S}}_B \rightarrow \underline{\underline{S}}_A$)

d'où

$$2\sqrt{2}\ k_1 - \|\Delta\underline{\underline{S}}\| \leqslant \|\Delta\underline{\underline{S}}\| \left(\frac{2\sqrt{2}\ k_o}{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|} + \frac{2g}{A} - 1 \right) \leqslant 0 \qquad \text{(III.4.59)}$$

puisque k_o est petit devant $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|$ et que, de plus, g est petit devant μ donc devant $A = \mu + 2c + \sqrt{2}\ g$. Dorénovant,

nous supposons donc que $\|\Delta\underline{\underline{S}}\| > 2\sqrt{2}\ k_1$. Le cristal entre à nouveau en charge plastique à partir du moment où $\underline{\underline{S}}$ atteint la frontière du critère (point C sur la figure III.12), c'est-à-dire, la valeur $\underline{\underline{S}}_{½}$ donnée par :

$$\|\underline{\underline{S}}_A-\underline{\underline{S}}_{½}\| = 2\sqrt{2}\ k_1 \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{S}}_{½}=\underline{\underline{S}}_A-2\sqrt{2}\ k_1\ \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.60)}$$

A la fin de ce demi-cycle, lorsque $\underline{\underline{S}}$ atteint $\underline{\underline{S}}_B$, la limite d'élasticité du cristal est :

$$k_{1+½}= k_1+\frac{g}{A}\int_{\underline{\underline{S}}_{½}}^{\underline{\underline{S}}_B}\sqrt{d\underline{\underline{S}}:d\underline{\underline{S}}} = k_1+\frac{g}{A}\|\underline{\underline{S}}_B-\underline{\underline{S}}_{½}\| = k_1+\frac{g}{A}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\sqrt{2}\ k_1\right) \qquad \text{(III.4.61)}$$

Les déformations plastiques $\underline{\underline{\varepsilon}}^p_{1+½}$ valent :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p_{1+½}=\underline{\underline{\varepsilon}}^p_1+\frac{1}{A}\int_{\underline{\underline{S}}_{½}}^{\underline{\underline{S}}_B}d\underline{\underline{S}}=\underline{\underline{\varepsilon}}^p_1+\frac{1}{A}(\underline{\underline{S}}_B-\underline{\underline{S}}_{½})=\underline{\underline{\varepsilon}}^p_1-\frac{1}{A}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\ \sqrt{2}\ k_1\right)\underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.62)}$$

et le centre du domaine d'élasticité se trouve en :

$$\underline{\underline{z}}_{1+½} = (2\mu+c)\underline{\underline{\varepsilon}}^p_{1+½} = \underline{\underline{z}}_1-\frac{2\mu+c}{A}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\sqrt{2}k_1\right)\ \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.63)}$$

Examinons maintenant le demi-cycle suivant (trajet B → A sur la figure III.12). Comme pour le demi-cycle précédent, il faut comparer $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|$ et $2\sqrt{2}\ k_{1+½}$ afin de savoir s'il y a ou non remise en charge du cristal. D'après l'égalité (III.4.61) nous avons :

$$\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\sqrt{2}\ k_{1+½}=\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\ \sqrt{2}\ k_1\right)\left(1-\frac{2\sqrt{2}\ g}{A}\right) > 0 \qquad \text{(III.4.64)}$$

car, le premier facteur est positif par hypothèse (cf. équation III.4.59) et le second aussi puisque g est petit devant μ donc devant $A = c + 2\mu + \sqrt{2}\ g$. Le cristal entre

donc en charge plastique lorsque $\underline{\underline{S}}$ atteint la valeur $\underline{\underline{S}}_1$ (point D, Figure III.12) définie par :

$$\|\underline{\underline{S}}_1-\underline{\underline{S}}_B\| = 2\sqrt{2}\ k_{1+½} \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{S}}_1=\underline{\underline{S}}_B+\left(2\sqrt{2}\ k_{1+½}\right)\underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.65)}$$

En substituant $k_{1+½}$ par son expression en fonction de k_1 (équation III.4.61) nous obtenons, à la fin de ce demi-cycle :

$$k_2=k_{1+½}+\frac{g}{A}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\sqrt{2}\ k_{1+½}\right)=k_1+\frac{2g}{A}\left(1-\frac{\sqrt{2}\ g}{A}\right)\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\sqrt{2}\ k_1\right) \qquad \text{(III.4.66)}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p_2 = \underline{\underline{\varepsilon}}^p_1+\frac{1}{A}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\sqrt{2}\ k_{1+½}\right)\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^p_1-\frac{2\sqrt{2}\ g}{A^2}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\sqrt{2}\ k_1\right)\underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.67)}$$

$$\underline{\underline{z}}_2 = \underline{\underline{z}}_1 - \frac{2\sqrt{2}\ g(c+2\mu)}{A^2}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\sqrt{2}\ k_1\right)\underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.68)}$$

Nous allons maintenant montrer, par récurrence, que tous les cycles suivants (trajets A → B → A successifs) sont analogues au premier. Pour cela, supposons qu'à l'issue du (i-1)ème cycle de chargement (i≥2), la limite d'élasticité du cristal soit

$$k_i= k_{i-1}+\frac{2g}{A}\left(1-\frac{\sqrt{2}\ g}{A}\right)\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\sqrt{2}\ k_{i-1}\right) \qquad \text{(III.4.69)}$$

que les déformations plastiques vaillent

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p_i= \underline{\underline{\varepsilon}}^p_{i-1}-\frac{2\sqrt{2}\ g}{A^2}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|-2\sqrt{2}\ k_{i-1}\right)\underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.70)}$$

et que la condition

$$\|\Delta \underline{\underline{S}}\| > 2\sqrt{2}\, k_{i-1} \qquad \text{(III.4.71)}$$

soit réalisée. Remarquons que, pour i=2, ces trois propriétés ont été démontrées (équations III.4.59, III.4.66 et III.4.67). Vérifions qu'elles sont encore vraies à l'issue du i-ème cycle. Au cours du premier demi-cycle (trajet A → B, Fig. III.12), après le cycle (i-1), le cristal entre en charge plastique. En effet, grâce à la relation (III.4.69), nous obtenons

$$\|\Delta \underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\, k_i = \left(\|\Delta \underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\, k_{i-1}\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}\, g}{A}\right)^2 > 0 \qquad \text{(III.4.72)}$$

puisque le premier facteur est positif d'après la condition (III.4.71). La valeur de $\underline{\underline{S}}$ à partir de laquelle le cristal est en charge plastique durant le cycle i est (voir aussi équation III.4.60) :

$$\underline{\underline{S}}_{i-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{S}}_A - 2\sqrt{2}\, k_i\, \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.73)}$$

A la fin de ce demi-cycle nous obtenons (voir équations III.4.61, III.4.62 et III.4.63) :

$$k_{i+\frac{1}{2}} = k_i + \frac{g}{A}\|\underline{\underline{S}}_B - \underline{\underline{S}}_{i-\frac{1}{2}}\| = k_i + \frac{g}{A}\left(\|\Delta \underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\, k_i\right) \qquad \text{(III.4.74)}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p_{i+\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^p_i + \frac{1}{A}(\underline{\underline{S}}_B - \underline{\underline{S}}_{i-\frac{1}{2}}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^p_i - \frac{1}{A}\left(\|\Delta \underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\, k_i\right) \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.75)}$$

$$\underline{\underline{z}}_{i+\frac{1}{2}} = (2\mu + c)\, \underline{\underline{\varepsilon}}^p_{i+\frac{1}{2}} \qquad \text{(III.4.76)}$$

Le demi-cycle suivant se traite de manière analogue. La charge plastique commence à nouveau lorsque $\underline{\underline{S}}$ atteint la valeur (voir aussi équation III.4.65)

$$\underline{\underline{S}}_i = \underline{\underline{S}}_B + 2\sqrt{2}\, k_{i+\frac{1}{2}}\, \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.77)}$$

puisque

$$\|\Delta\underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\ k_{i+\frac{1}{2}} = \left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\ k_i\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}\ g}{A}\right) > 0 \qquad \text{(III.4.78)}$$

En fin de cycle, nous avons donc :

$$k_{i+1} = k_{i+\frac{1}{2}} + \frac{g}{A}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\ k_{i+\frac{1}{2}}\right) = k_i + \frac{2g}{A}\left(1 - \frac{\sqrt{2}\ g}{A}\right)\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\ k_i\right) \qquad \text{(III.4.79)}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p_{i+1} = \underline{\underline{\varepsilon}}^p_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{A}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\ k_{i+\frac{1}{2}}\right)\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^p_i - \frac{2\sqrt{2}\ g}{A^2}\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\ k_i\right)\underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.80)}$$

Nous avons bien obtenu, à l'issue du i-ème cycle, les mêmes propriétés qu'au cycle précédent (voir équations III.4.69 et III.4.70). Donc les relations (III.4.79) et (III.4.80) sont vraies pour un cycle quelconque du chargement. Il nous reste maintenant à étudier les suites définies par (III.4.79), (III.4.80) et leurs valeurs initiales respectives (III.4.55) et (III.4.56).

Si δk_i désigne la variation de la limite d'élasticité au cours du i-ème cycle ($\delta k_i = k_{i+1} - k_i$), la relation (III.4.79) conduit à :

$$\delta k_i = \frac{2g}{A}\left(1 - \frac{\sqrt{2}\ g}{A}\right)\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}\ k_i\right) \qquad \text{(III.4.81)}$$

En remplaçant k_i par l'expression (III.4.69) dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\delta k_i = \left(1 - \frac{2\sqrt{2}\ g}{A}\right)^2 \delta k_{i-1} \qquad \text{(III.4.82)}$$

Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison

$$\omega = \left(1 - \frac{2\sqrt{2}\ g}{A}\right)^2 \quad , \quad 0 < \omega < 1 \qquad \text{(III.4.83)}$$

qui nous permet d'obtenir une expression simple pour la limite d'élasticité k_{N+1} à l'issue du N-ème cycle :

$$k_{N+1} = k_1 + \sum_{i=1}^{N} \delta k_i = k_1 + \delta k_1 \frac{1-\omega^N}{1-\omega} \qquad \text{(III.4.84)}$$

soit encore, en utilisant les équations (III.4.66) et (III.4.83) :

$$k_{N+1} = \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - \left(1 - \frac{2\sqrt{2}\ g}{A}\right)^{2N} \left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_1\right) \qquad \text{(III.4.85)}$$

La relation de récurrence (équation III.4.80) nous permet d'exprimer de manière similaire les déformations plastiques correspondantes $\underline{\underline{\varepsilon}}^p_{N+1}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p_{N+1} = \underline{\underline{\varepsilon}}^p_1 - \frac{2\sqrt{2}\ g}{A^2} \left(N\|\underline{\underline{\Delta S}}\| - 2\sqrt{2} \sum_{i=1}^{N} k_i\right) \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.86)}$$

soit encore, en utilisant les relations (III.4.56), (III.4.44) et (III.4.85) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p_{N+1} = \frac{\|\underline{\underline{S}}_A\| - \dfrac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2}}{c + 2\mu} \underline{\underline{e}} + \left(1 - \frac{2\sqrt{2}\ g}{A}\right)^{2N} \frac{\left(\|\underline{\underline{\Delta S}}\| - 2\sqrt{2}\ k_1\right)}{2(c + 2\mu)} \underline{\underline{e}} \qquad \text{(III.4.87)}$$

Lorsque N tend vers l'infini, k_{N+1} et $\underline{\underline{\varepsilon}}^p_{N+1}$ tendent respectivement vers :

$$\lim_{N\to\infty} k_{N+1} = k^* = \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} \qquad \text{(III.4.88)}$$

et

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\underline{\varepsilon}}^p_{N+1} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*} = \frac{\|\underline{\underline{S}}_A\| - \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2}}{c + 2\mu}\, \underline{\underline{e}} = \frac{\underline{\underline{S}}_m}{c+2\mu} \qquad \text{(III.4.89)}$$

Les contraintes résiduelles tendent donc vers :

$$\underline{\underline{\rho}}^* = \frac{-2\mu}{c+2\mu}\, \underline{\underline{S}}_m \qquad \text{(III.4.90)}$$

L'état adapté du cristal, décrit par les équations (III.4.88) et (III.4.90), est atteint au bout d'un nombre infini de cycles, et notre méthode d'évaluation conduit exactement aux mêmes résultats (voir équations III.4.26 et III.4.27). Avant de passer à la formulation du critère de fatigue, signalons que notre méthode d'évaluation de l'état adapté du cristal est encore exacte dans le cas d'un chargement affine. Mais le calcul analytique devient alors beaucoup trop long, aussi nous n'avons pas jugé utile de le présenter ici.

III.4.3 FORMULAION DU CRITERE DE FATIGUE

Rappelons que, dans notre étude, le critère de fatigue s'identifie à un critère de non-nucléation de microfissures dans les cristaux qui se plastifient lors de la première phase (stade 0) du phénomène de fatigue. Il doit donc traduire la possibilité qu'ont ces cristaux de s'adapter. Dans le paragraphe III.4.1, nous avons précisément étudié une condition necessaire d'adaptation qui était l'existence d'un couple $\left(\underline{\underline{z}}^*, k^*\right)$ vérifiant à tout instant une certaine inégalité (critère de plasticité). Nous avions alors donné une méthode d'évaluation d'un tel couple et remarqué qu'elle conduisait en réalité à l'état adapté exact dans le cas d'un chargement affine ou radial. Mais, pour qu'il y ait effectivement adaptation, il fallait encore que $\underline{\underline{z}}^*$ ne fût pas trop grand et que k^* fût suffisamment proche de la limite d'élasticité initiale k_o du cristal. Montrons tout d'abord que la première de ces deux conditions, celle qui assure que l'état $\underline{\underline{z}}^*$ reste dans le cadre des petites déformations, est automatiquement vérifiée. En effet, la méthode d'évaluation de l'état adapté choisie, conduit à prendre $\underline{\underline{z}}^*$ de l'ordre de l'état moyen $\underline{\underline{S}}_m$ du déviateur des contraintes macroscopiques ; or ce dernier, à l'image du trajet de chargement $\underline{\underline{S}}(t)$, reste par hypothèse dans le cadre des petites déformations. Finalement, seule subsiste la condition de proximité de k^* et k_o qui est équivalente à une limitation supérieure de la valeur de k^*. Nous admettons que cette limitation, nécessaire mais non suffisante, constitue précisément le critère de non-nucléation donc le critère de fatigue du matériau.

Jusqu'à maintenant, tous les résultats ont été obtenus sans faire intervenir la pression hydrostatique p(t).

En particulier, k^* n'en dépend pas. Or, l'influence de la pression sur la limite d'endurance a été prouvée expérimentalement. Nous allons donc supposer que la limitation imposée sur k^* dépend de la pression hydrostatique p(t). Par ce choix, nous considérons implicitement que, dans le cadre de la fatigue, les quantités caractéristiques d'un chargement cyclique se réduisent au couple $(p(t),k^*)$. Le trajet $\mathcal{L}^*$ correspondant dans le plan (p,k) est tout simplement un segment de droite parallèle à l'axe des pressions et situé à une ordonnée k^* positive (Fig. III.13).

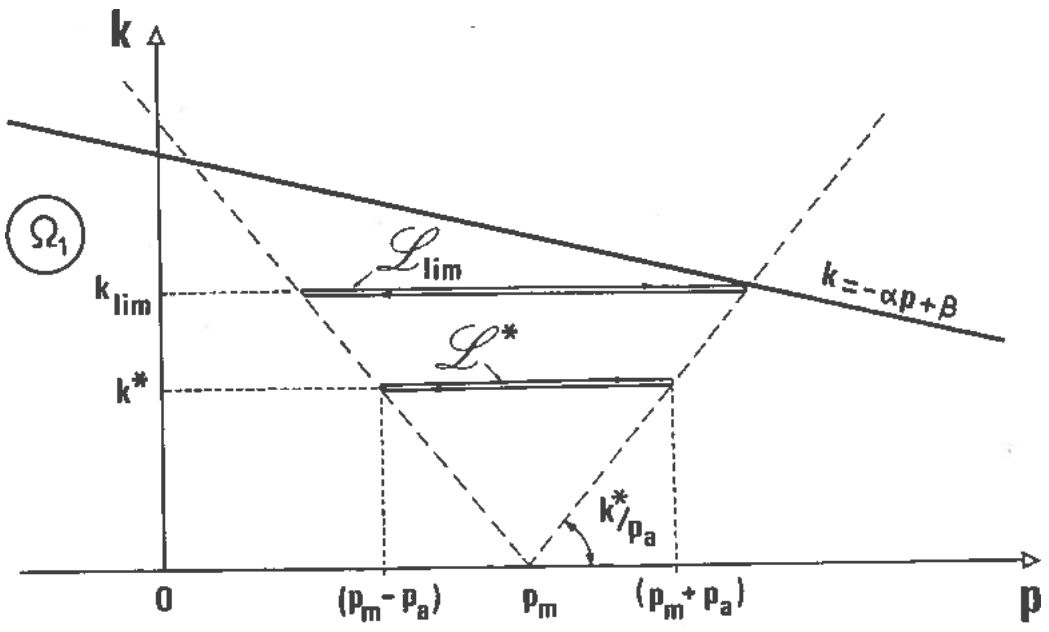


Figure III.13 Trajets réduits de chargements similaires et domaine de non-nucléation de fissures.

$\mathcal{L}^*$ sera appelé <u>trajet réduit du chargement</u>, pour le distinguer du trajet complet $\mathcal{L}'$ parcouru par le couple $\left(p(t), \frac{1}{2} \sqrt{\left(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}^*\right) : \left(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}^*\right)} \right)$. Nous postulons alors que le critère de fatigue dans le plan (p,k) est donné par la droite d'équation :

$$k = - \alpha p + \beta \qquad \text{(III.4.91)}$$

et donc que le domaine de non nucléation Ω_1 est la partie du plan comprise entre cette droite et l'axe des pressions, c'est-à-dire, (Fig. III.13) :

$$\Omega_1 = \left\{ (p,k) \ / \ k \leqslant - \alpha p + \beta \right\} \qquad \text{(III.4.92)}$$

Pour un trajet réduit $\mathcal{L}^*$, la <u>condition de non nucléation</u> s'écrit alors :

$$\boxed{\mathcal{L}^* \in \Omega_1} \qquad \text{(III.4.93)}$$

Afin d'illustrer la différence entre trajet réduit $\mathcal{L}^*$ et trajet complet $\mathcal{L}'$, nous avons tracé dans le plan $\left(p , \frac{1}{2} \sqrt{\left(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{z}}^*\right) : \left(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{z}}^*\right)} \right)$ ces deux trajets pour un essai de Mc Diarmid [54], (Fig. III.14). La représentation de $\mathcal{L}^* = (p(t),k^*)$ dans le plan $\left(p, \frac{1}{2} \sqrt{\left(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{z}}^*\right) : \left(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{z}}^*\right)} \right)$ est possible, puisque $\sqrt{2}\ k^* = \max_{t \in T} \sqrt{\left(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}^*\right) : \left(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}^*\right)}$

L'essai présenté est un essai à directions principales de $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ fixes, pour lequel les deux contraintes principales non nulles sont sinusoïdales des fréquences différentes. L'évaluation de k^*, $\underline{\underline{z}}^*$ a été obtenue par la construction de la plus petite hypersphère circonscrite à Φ' (§ III.4.1).

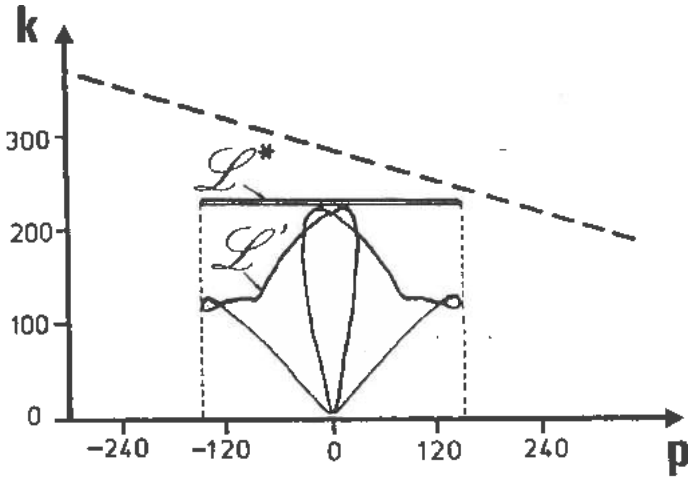


Figure III.14 Trajets complet $\mathscr{L}'$ et réduit $\mathscr{L}^*$ pour un essai de Mc Diarmid [54].

Il existe plusieurs façons équivalentes d'écrire explicitement la condition de non nucléation (III.4.93) $\mathscr{L}^* \in \Omega_1$, en fonction de k^* et $p(t)$, suivant la manière dont on mesure la distance du trajet réduit $\mathscr{L}^*$ à la droite d'équation $k = -\alpha p + \beta$. Nous choisissons ici celle qui est associée au concept de chargements similaires. Deux chargements sont dits similaires s'ils admettent la même pression moyenne p_m et le même rapport $\frac{k^*}{p_a}$, où p_a est l'amplitude de la pression. Dans le plan (p,k), leurs trajets réduits respectifs sont donc homothétiques par rapport au point $(p_m,0)$, (voir figure III.13). Nous définissons ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des trajets réduits du plan (p,k). Un représentant privilégié de chaque classe d'équivalence est le trajet réduit $\mathscr{L}_{lim}$ qui se trouve à la limite du domaine de non nucléation, c'est-à-dire celui dont l'extrêmité droite appartient à la droite d'équation $k = -\alpha p + \beta$ (Fig. III.13) . Soient $p_{lim}(t)$ et

k_{lim} ses caractéristiques. Alors, pour tout chargement $(p(t),k^*)$ appartenant à la classe de $(P_{lim}(t), k_{lim})$, la condition de non nucléation (III.4.93) est équivalente à :

$$k^* \leqslant k_{lim} \qquad \text{(III.4.94)}$$

Par définition, k_{lim} est unique pour tous les chargements qui sont similaires entre eux. Sa valeur ne dépend que de la classe d'équivalence considérée. k_{lim} peut donc être exprimé en fonction de p_m et $\frac{k^*}{p_a}$, où p_m, p_a et k^* définissent l'un quelconque des chargements de la classe d'équivalence. En remarquant que k_{lim} est l'ordonnée du point de contact de $\mathcal{L}_{lim}$ avec la droite d'équation $k = -\alpha p + \beta$ (Fig. III.13), nous obtenons :

$$\boxed{k_{lim} = \frac{-\alpha p_m + \beta}{\alpha + \dfrac{k^*}{p_a}} \frac{k^*}{p_a}} \qquad \text{(III.4.95)}$$

Bien entendu, il existe d'autres définitions de k_{lim} pour lesquelles la relation (III.4.94) est équivalente à la condition de non nucléation (III.4.93). Mais la définition (III.4.95) est la seule qui puisse généraliser la notion de limite d'endurance. Rappelons que cette dernière était définie pour chaque nature de chargement uniaxial (traction-compression, flexion, torsion, etc.) et pour chaque valeur de la contrainte moyenne correspondante, comme étant l'amplitude de la contrainte appliquée au delà de laquelle intervient la rupture par fatigue. Par définition, cette limite est donc la même pour tous les chargements uniaxiaux de même nature et même valeur moyenne mais d'amplitudes différentes, qui sont précisément des chargements similaires. La définition (III.4.95) adoptée pour k_{lim} est la seule qui présente cette même propriété.

Par conséquent, k_{lim} sera appelé <u>limite d'endurance généralisée</u>, puisqu'elle est définie pour tout chargement périodique.

En utilisant la définition (III.4.95), le critère de fatigue (équation III.4.94) conduit à la relation

$$k^* \leqslant -\alpha(p_a + p_m) + \beta \Rightarrow k^* \leqslant -\alpha p_{max} + \beta \qquad \text{(III.4.96)}$$

où p_{max} est la pression hydrostatique maximale atteinte au cours du cycle. L'expression (III.4.96) est trompeuse car elle suggère de choisir k_{lim} égal à $-\alpha p_{max} + \beta$. Or, dans ce cas, k_{lim} ainsi choisi ne définit plus la limite d'endurance. En effet, lors d'un essai en traction-compression alternée par exemple, $\Sigma_{11}(t) = \Sigma_a \sin\omega t$, $p_{max} = \frac{\Sigma_a}{3}$, donc $-\alpha p_{max} + \beta = -\alpha \frac{\Sigma_a}{3} + \beta$ n'est pas une quantité indépendante de l'amplitude Σ_a. En revanche, $k^* = \frac{\Sigma_a}{\sqrt{3}}$, $p_m = 0$, $p_a = \frac{\Sigma_a}{3}$, dont l'équation (III.4.95) nous donne $k_{lim} = \frac{\sqrt{3}\,\beta}{\alpha + \sqrt{3}}$ qui est bien une quantité indépendante de Σ_a.

Les constantes α et β peuvent être déterminées à partir d'essais en torsion et flexion alternée par exemple. Rappelons que, pour un chargement affine, l'expression de k^* est tout simplement (voir § III.4.1)

$$k^* = \frac{\sqrt{\underline{\underline{\Delta S}} : \underline{\underline{\Delta S}}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} \qquad \text{(III.4.97)}$$

Lors d'un essai en torsion alternée ($\Sigma_{xy}(\tau) = t \sin\omega\tau$) nous avons :

$$\Delta\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 2t & 0 \\ 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.4.98)}$$

de norme $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|$ égale à $2\sqrt{2}$ t. Par ailleurs, la pression hydrostatique étant identiquement nulle, sa valeur maximale est zéro. L'application du critère de fatigue (équations III.4.94 et III.4.95) conduit donc à :

$$k^* \leqslant k_{lim} \Rightarrow \beta = t \qquad \text{(III.4.99)}$$

où t désigne la limite d'endurance en torsion alternée.

Lors d'un essai en flexion alternée ($\Sigma_{xx}(\tau) = f \sin\omega\tau$), nous avons :

$$\Delta\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{4f}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2f}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2f}{3} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.4.100)}$$

de norme $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|$ égale à $2\sqrt{2}\ \frac{f}{\sqrt{3}}$. Par ailleurs, la pression moyenne p_m est égale à zéro et son amplitude p_a est égale à $\frac{f}{3}$. L'application du critère de fatigue (Equations III.4.94 et III.4.95), nous donne alors la valeur de α :

$$k^* \leqslant k_{lim} \Rightarrow \alpha = \frac{t - \frac{f}{\sqrt{3}}}{\frac{f}{3}} \qquad \text{(III.4.101)}$$

où f est la limite d'endurance en flexion alternée. Pour rendre compte de l'effet bénéfique d'une pression négative,

α doit être strictement positif. Le critère de fatigue proposé n'est donc valable que pour les métaux dont le rapport $\frac{f}{t}$ est inférieur à $\sqrt{3}$. En revanche, il est en accord avec l'observation expérimentale selon laquelle l'influence de la torsion moyenne lors d'une expérience en torsion aysmétrique est négligeable.

Tout au long de notre analyse, nous avons écarté les chargements macroscopiques suffisamment faibles pour que le comportement de chacun des cristaux du volume élémentaire $V(\underline{x})$ reste élastique. Ce sont les chargements tels que k^* est inférieure à la limite d'élasticité initiale k_o du cristal. Il faut donc ajouter au domaine de non nucléation Ω_1 le domaine Ω_2 défini par :

$$\Omega_2 = \{ (p,k) / k \leqslant k_o \} \qquad \text{(III.4.102)}$$

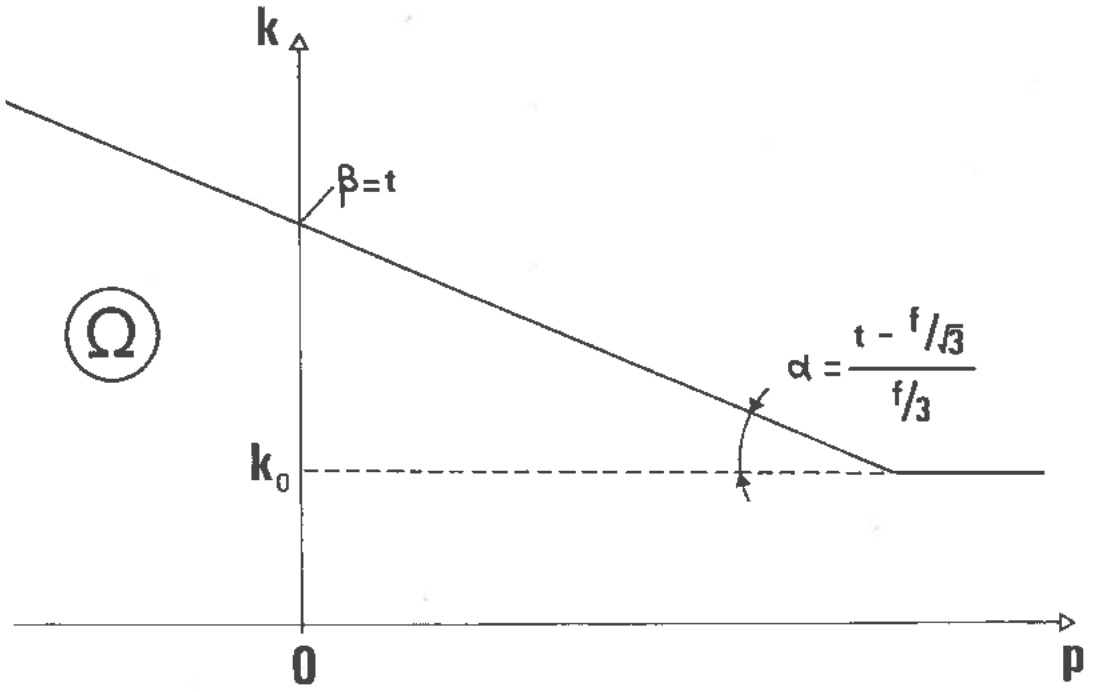


Figure III.15 Domaine de non nucléation des fissures de fatigue.

Le domaine de non nucléation est alors $\Omega_1 \cup \Omega_2$ (Fig.III.15). Notons cependant que la partie du plan (p,k) touchée par cette modification se trouve dans la région des grandes pressions hydrostatiques positives, région qui n'est en général pas atteinte lors des applications.

Nous allons maintenant comparer ce critère de fatigue, d'une part à celui de Dang Van et d'autre part à celui de Crossland puisque ce dernier avait été retenu comme le meilleur des critères traditionnels. Nous chercherons, en particulier, à mettre en évidence leurs différences.

III.4.4 SIMILARITES ET DIFFERENCES DU CRITERE PROPOSE, AVEC LES CRITERES DE CROSSLAND ET DE DANG VAN

III.4.4.1 COMPARAISON AVEC LE CRITERE DE CROSSLAND

Dans le cas d'un chargement à trajet radial ou affine, nous savons que k^* est donné par :

$$k^* = \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \qquad \text{(III.4.103)}$$

Le critère de fatigue proposé (équation III.4.94) peut donc s'écrire :

$$\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} + \alpha p_{max} \leqslant \beta \qquad \text{(III.4.104)}$$

alors que le critère de Crossland est donné par :

$$\tau_a + a\, P_{max} \leq b \qquad \text{(III.4.105)}$$

où τ_a représente l'amplitude de $\sqrt{J_2(t)}$ et P_{max}, la pression hydrostatique macroscopique maximale. Dans le paragraphe III.2.2 nous avons montré que les pressions microscopique et macroscopique étaient égales à tout instant et donc que $p_{max} = P_{max}$. D'autre part, dans le paragraphe I.3, le calcul de τ_a dans le cas d'un chargement à trajet affine ou radial, avait donné $\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}$. Par conséquent, le critère de fatigue proposé coïncide avec le critère de Crossland pour des chargements à trajets affines ou radiaux. En particulier, les constantes α et β sont respectivement égales aux constantes a et b. Par contre, <u>les deux critères ne coïncident généralement pas dans le cas des chargements périodiques généraux</u>. Rappelons que $2\sqrt{2}\ \tau_a$ est aussi le diamètre de la courbe Φ' qui représente le trajet de chargement dans l'espace des déviateurs. En revanche, $2\sqrt{2}\ k^*$ est le diamètre de la plus petite hypersphère circonscrite à cette même courbe Φ'. Or, en général, ces deux quantités ne coïncident pas et l'exemple présenté ci-après en est une preuve. Considérons un essai au cours duquel les directions principales du tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ sont fixes. Dans ce cas, le déviateur $\underline{\underline{S}}(t)$ appartenant au plan octaédrique Π alors fixe décrit une courbe plane fermée Φ' de ce même plan. Supposons que Φ' soit un triangle équilatéral de côté ℓ (voir Fig. III.16). Comme le diamètre d'un triangle équilatéral est égale à son côté, nous avons :

$$2\sqrt{2}\ \tau_a = \ell \Rightarrow \tau_a = \frac{\ell}{2\sqrt{2}} \qquad \text{(III.4.106)}$$

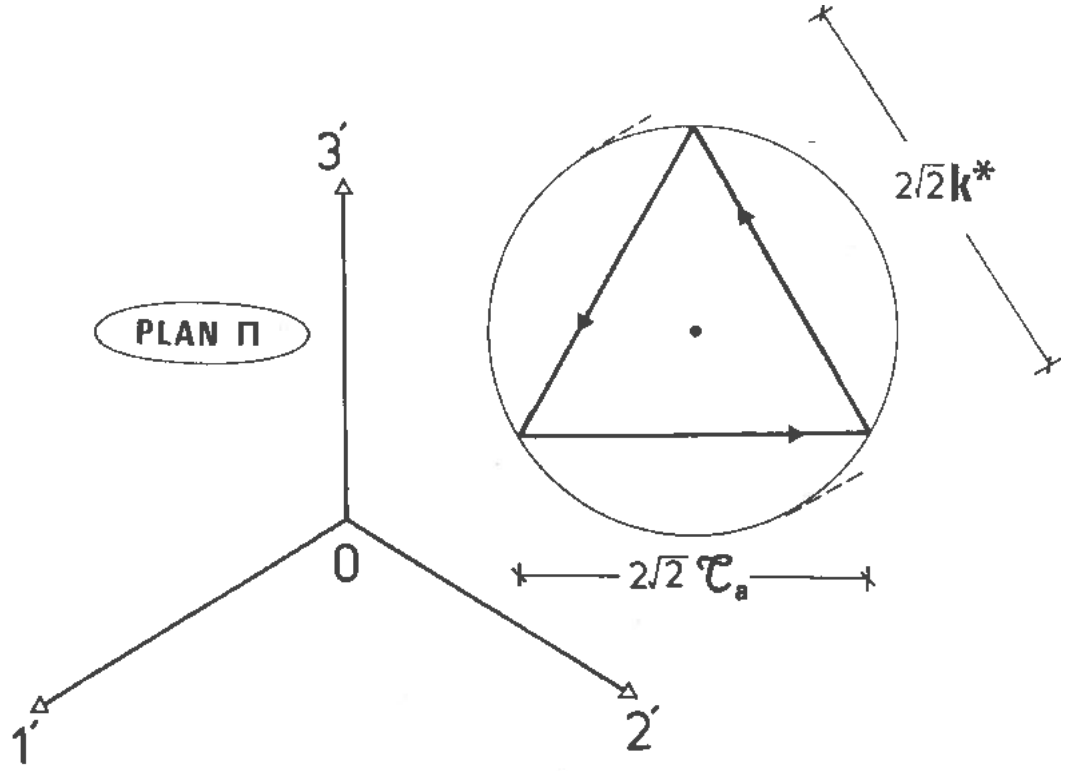


Figure III.16 Exemple discriminatoire pour le nouveau critère et le critère de Crossland.

Par ailleurs, le plus petit cercle circonscrit étant celui qui passe par les trois sommets (de diamètre $\frac{2\ell}{\sqrt{3}}$), nous obtenons :

$$2\sqrt{2}\ k^* = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \ell \quad \Rightarrow \quad k^* = \frac{\ell}{\sqrt{6}} \qquad \text{(III.4.107)}$$

Dans ce cas, le nouveau critère et le critère de Crossland ne sont pas équivalents puisque k^* et τ_a ne sont pas égaux. Plus précisément nous obtenons :

$$\tau_a = \frac{\sqrt{3}}{2} k^* \qquad \text{(III.4.108)}$$

D'une manière générale, puisque le diamètre d'une courbe est inférieur ou égal au diamètre de sa plus petite hypersphère circonscrite, nous avons toujours l'inégalité :

$$\tau_a \leqslant k^* \qquad \text{(III.4.109)}$$

et donc également

$$\tau_a + a\, \mathcal{P}_{max} \leqslant k^* + \alpha p_{max} \qquad \text{(III.4.110)}$$

En clair, cela signifie que le critère de Crossland peut conduire à des prédictions non conservatives par rapport au nouveau critère que nous proposons. En particulier, l'utilisation du critère de Crossland pour le dimensionnement en fatigue d'une pièce industrielle destinée à supporter des charges complexes, conduit généralement à un sous-dimensionnement qui peut s'avérer dangereux.

III.4.4.2 COMPARAISON AVEC LE CRITERE DE DANG VAN

Dans l'approche de Dang Van, le cristal obéit à un critère de plasticité découlant de la loi de Schmid avec écrouissage isotrope linéaire. Dans l'approche proposée, le cristal obéit au critère de von Mises avec écrouissage isotrope et cinématique. Remarquons tout d'abord qu'il n'est pas nécessaire de connaître le module d'écrouissage cinématique c pour appliquer notre critère de fatigue. La valeur de c n'est indispensable que pour le calcul du

tenseur complet des contraintes microscopiques du cycle adapté $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t)$:

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) - \frac{2\mu}{c + 2\mu}\,\underline{\underline{z}}^* \qquad \text{(III.4.111)}$$

Néanmoins, pour comparer les deux approches, nous allons momentanément négliger l'écrouissage cinématique, i.e. prendre c égal à zéro. Dans ce cas, les contraintes microscopiques du cycle adapté sont données par :

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\underline{z}}^* \qquad \text{(III.4.112)}$$

et par conséquent :

$$\underline{\underline{z}}^* = - \underline{\underline{\rho}}^* \qquad \text{(III.4.113)}$$

Dans le cas des chargements périodiques affines ou généraux, la méthode proposée par Dang Van ne permet pas d'obtenir le tenseur complet $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t)$. En effet, elle ne repose alors que sur la construction du trajet de $\hat{\tau}(t)$ sur chaque plan matériel (voir § III.3.3). En revanche, dans le cas des chargements proportionnels, l'approche de Dang Van conduit à :

$$\hat{\sigma}_{ij}(t) = \Sigma_{ij}(t) - 2a_{ij}\,C_m \qquad \text{(III.4.114)}$$

où $a_{ij} = \frac{1}{2}\,(n_i m_j + n_j m_i)$, $\underline{n}$ et $\underline{m}$ caractérisant le plan et la direction de la cission macroscopique maximale dont la valeur moyenne est C_m . Dans ce même cas, l'équation (III.4.112) devient :

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\underline{S}}_m \qquad \text{(III.4.115)}$$

où $\underline{\underline{S}}_m$ est le déviateur macroscopique moyen. Les deux approches conduisent alors à des tenseurs $\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t)$ différents (voir équations III.4.114 et III.4.115). Néanmoins, la cission microscopique, $\hat{\tau}(t) = a_{ij}\hat{\varepsilon}_{ij}(t)$ qui intervient dans le critère de Dang Van, est la même pour les deux états adaptés.

Nous venons de présenter les différences relatives à la modélisation du comportement du cristal, et à l'évaluation des contraintes microscopiques du cycle adapté. Nous allons maintenant comparer les deux critères au niveau de leur formulation même.

La différence essentielle réside dans le choix de k^* à la place de la cission microscopique $\hat{\tau}$. En négligeant à nouveau l'écrouissage cinématique ($c = 0$, et $\underline{\underline{z}} = -\underline{\underline{\rho}}$) la définition de k^* (équation III.4.19) devient :

$$k^* = \max_{t\in T} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{S}}(t) + \underline{\underline{\rho}}^*\right) : \left(\underline{\underline{S}}(t) + \underline{\underline{\rho}}^*\right)} \qquad \text{(III.4.116)}$$

soit encore

$$k^* = \max_{t\in T} \sqrt{\frac{1}{2}\,\hat{\underline{\underline{s}}}(t) : \hat{\underline{\underline{s}}}(t)} = \max_{t\in T} \sqrt{\hat{J}_2(t)} \qquad \text{(III.4.117)}$$

où $\hat{J}_2(t)$ représente le second invariant du déviateur microscopique $\hat{\underline{\underline{s}}}(t)$ du cycle adapté. Prendre $\sqrt{\hat{J}_2(t)}$ à la place de $\hat{\tau}(t)$ revient à choisir la mesure de von Mises à la place de celle de Tresca. Or nous savons que la différence entre ces deux mesures n'excède pas 7 % ce qui est négligeable étant donnée la dispersion statistique des résultats expérimentaux en fatigue. De ce point de vue,

nous pouvons dire que le critère proposé est proche de celui de Dang Van. Toutefois, il subsiste entre ces deux critères, une dernière différence liée à la maximisation au cours d'une période de temps. Rappelons que le critère de Dang Van est donné par :

$$\max_{t\in T} \left(\hat{\tau}(t) + a p(t) \right) \leqslant b \qquad \text{(III.4.118)}$$

alors que celui que nous proposons (sans écrouissage cinématique) s'écrit :

$$\max_{t\in T} \sqrt{\hat{J}_2(t)} + \alpha \max_{t\in T} p(t) \leqslant \beta \qquad \text{(III.4.119)}$$

Dans le premier cas, la maximisation est effectuée globalement sur $(\hat{\tau}(t) + a p(t))$ alors que dans le second cas, elle est effectuée indépendamment sur $\sqrt{\hat{J}_2(t)}$ et $p(t)$. Le critère que nous proposons est donc plus conservatif que le critère de Dang Van et ceci pour deux raisons : d'une part, il utilise la mesure de Von Mises qui est supérieure à celle de Tresca et, d'autre part, il porte sur une somme de maxima qui est toujours supérieure au maximum de la somme.

Enfin, nous devons aussi comparer ces deux critères du point de vue de leur implémentation numérique. Rappelons que, dans le cas des chargements périodiques affines ou généraux, l'application du critère de Dang Van nécessite la double maximisation de $\left(\hat{\tau}(\underline{n},t) + a p(t)\right)$ par rapport au plan $\underline{n}$ et au temps t. Les calculs induits par l'application du nouveau critère sont beaucoup moins longs puisque limités à la construction de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement dans l'espace des déviateurs macroscopiques. En revanche, l'orientation présumée du plan

d'initiation de la fissure de fatigue qui est, selon Dang Van, celle pour laquelle le maximum de $\left(\hat{\tau}(\underline{n},t) + ap(t)\right)$ est atteint, n'est pas accessible par la nouvelle approche proposée.

Pour terminer, nous signalons que des formulations "hybrides", c'est-à-dire utilisant le critère de fatigue de Dang Van pour un cristal dont le critère de plasticité est celui de von Mises, ont déjà été proposées [12], [13]. Pour le problème à caractère industriel étudié dans la référence [12], l'état adapté $\underline{\underline{\rho}}^*$, k^* a été déterminé par un calcul élastoplastique incremental. En revanche, pour l'analyse des résultats expérimentaux de Nishihara-Kawamoto [59], présentée dans la référence [13], l'état adapté a été évalué directement par la construction de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de $\underline{\underline{S}}(t)$.

Il nous reste maintenant à confronter le nouveau critère aux résultats expérimentaux.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS

IV-1 ESSAIS SOUS CHARGEMENT A TRAJET RADIAL OU AFFINE

Nous avons montré (§ III.4.4.1) que, dans ce cas, le critère proposé coïncide avec le critère de Crossland. Toutefois, étant donné le nombre important de résultats expérimentaux trouvés dans la littérature, nous pensons qu'il est intéressant de les interpréter systématiquement afin de tester la validité du nouveau critère (et du critère de Crossland) dans le cas de chargements relativement simples.

Les résultats dont nous disposons proviennent essentiellement d'essais de chargement à trajet radial, ceux à trajet affine étant plus rares.

Pour chaque matériau testé, les constantes α et β qui apparaissent dans la formulation du critère, sont identifiées grâce à deux essais particuliers parmi les résultats disponibles. L'écart entre un résultat expérimental et le critère ainsi défini est mesuré par l'indice I :

$$I = \frac{k^* + \alpha p_{max} - \beta}{\beta} \quad (\%) \qquad \text{(IV.1.1)}$$

Lorsque I est nul, la prédiction du critère est exacte pour l'essai considéré, c'est-à-dire que le point représentatif

(k^*, p_{max}) de l'essai se trouve sur la droite du critère de fatigue. Si I est négatif (resp. positif), le point représentatif de l'essai se trouve à l'intérieur (resp. extérieur) du domaine de non nucléation limité par la droite du critère.

Les essais étudiés sont de trois types :

- Eprouvettes cylindriques pleines sollicitées en flexion-torsion.

- Tubes minces ouverts sollicités en pression interne et traction longitudinale.

- Eprouvettes cylindriques pleines, sollicitées en traction ou en torsion et soumises à une pression externe constante.

IV.1.1 ESSAIS DE FLEXION-TORSION

Le tenseur des contraintes macroscopiques est de la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \Sigma_a \sin\omega t + \Sigma_m & T_a \sin\omega t + T_m & 0 \\ T_a \sin\omega t + T_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.1.2)}$$

Le trajet de chargement correspondant est en général affine. Il ne devient radial que si :

$$\frac{\Sigma_m}{\Sigma_a} = \frac{T_m}{T_a} \qquad \text{(IV.1.3)}$$

Le tenseur variation des contraintes $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ est :

$$\Delta\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 2\Sigma_a & 2T_a & 0 \\ 2T_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.1.4)}$$

et ses valeurs principales $\Delta\Sigma_1$, $\Delta\Sigma_2$, $\Delta\Sigma_3$ sont, dans un ordre décroissant :

$$\Delta\Sigma_1 = \Sigma_a + \sqrt{\Sigma_a^2 + 4T_a^2} \ , \ \Delta\Sigma_2 = 0 \ , \ \Delta\Sigma_3 = \Sigma_a - \sqrt{\Sigma_a^2 + 4T_a^2} \qquad \text{(IV.1.5)}$$

Pour un chargement à trajet radial ou affine, k^* est donné par :

$$k^* = \frac{\sqrt{\Delta\underline{\underline{S}} : \Delta\underline{\underline{S}}}}{2\sqrt{2}} \qquad \text{(IV.1.6)}$$

ou encore en fonction des valeurs principales du tenseur $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$

$$k^* = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{6}\left[(\Delta\Sigma_1 - \Delta\Sigma_2)^2 + (\Delta\Sigma_2 - \Delta\Sigma_3)^2 + (\Delta\Sigma_3 - \Delta\Sigma_1)^2 \right] \right\}^{1/2}$$

(IV.1.7)

Pour l'essai considéré, nous obtenons tout simplement :

$$k^* = \sqrt{\frac{\Sigma_a^2}{3} + T_a^2} \qquad \text{(IV.1.8)}$$

La pression hydrostatique maximale vaut :

$$p_{max} = \max_{t \in T} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tr} \underline{\underline{\Sigma}}(t) \right) = \frac{1}{3} (\Sigma_a + \Sigma_m) \qquad \text{(IV.1.9)}$$

Nous présentons ci-après les résultats expérimentaux de onze groupes d'essais sous une forme normalisée qui comprend un tableau récapitulatif et la représentation dans le plan (p,k) des couples $\left(p_{max},k^*\right)$ testés et du critère de fatigue proposé.

TABLEAU III

ESSAIS DE GOUGH-POLLARD

Matériau: Acier Nickel Chrome	Références: [28] [29]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: α=0,22 β=352MPa	Trajet: Radial

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	541	70	0	0	1100	0	-18	320	180	360	+2,3
2	491	144	0	0	1060	0	-78	318	164	354	+0,6
3	411	205	0	0	992	0	-170	314	137	344	-2,3
4	328	285	0	0	986	0	-330	342	109	366	+4,0
5	180	334	0	0	872	0	-512	350	60	363	+3,1

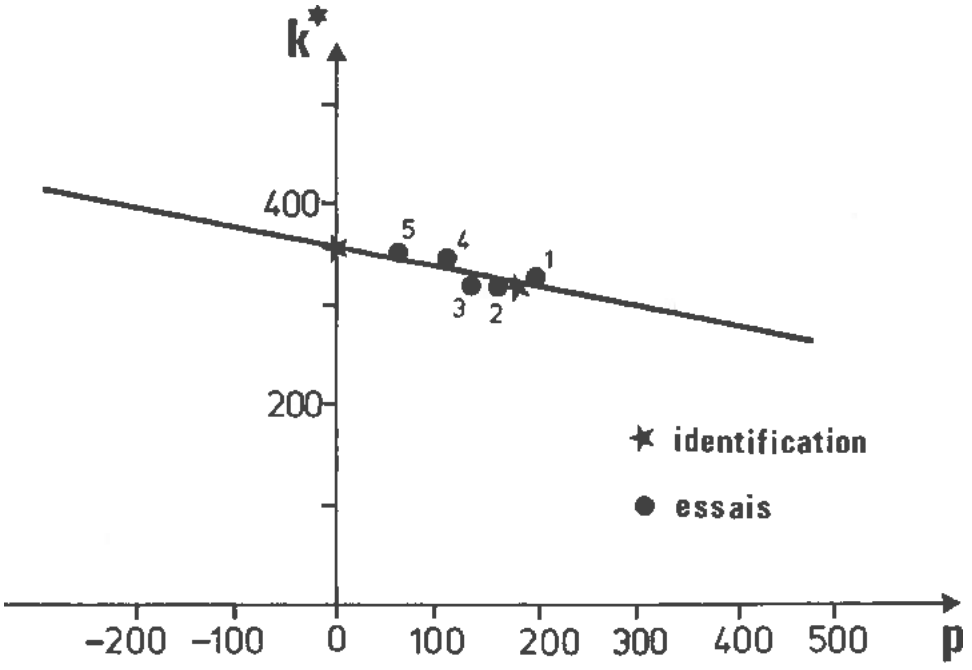


TABLEAU III (suite)

ESSAIS DE GOUGH-POLLARD

Matériau: Fer forgé	Références: [28] [29]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: α=0,99 β=219MPa	Trajet: Radial

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	234	35	0	0	478	0	-10	139	78	216	-1,4
2	208	62	0	0	450	0	-34	135	69	203	-7,3
3	195	97	0	0	470	0	-80	149	65	213	-2,7
4	154	132	0	0	460	0	-152	159	51	209	-4,6
5	90	167	0	0	436	0	-256	175	30	205	-6,4

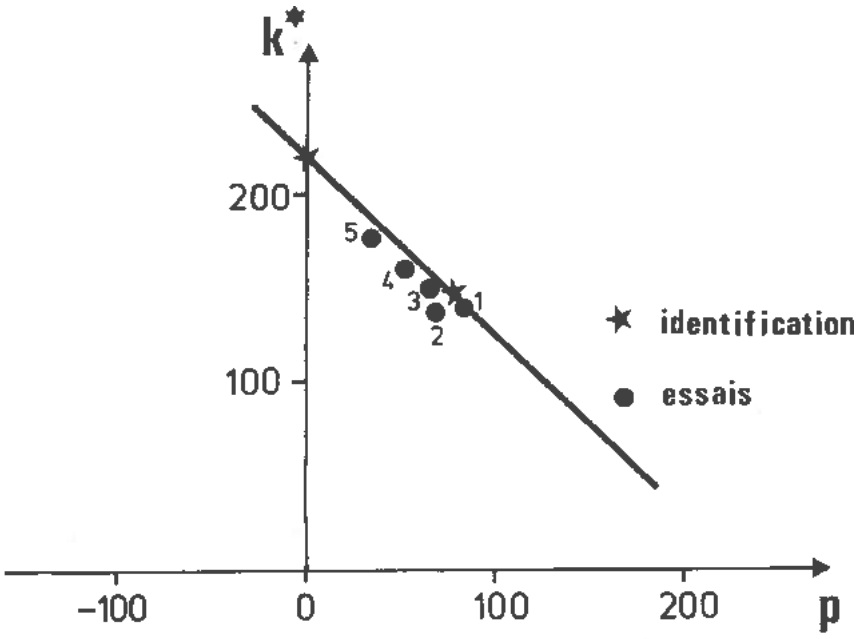


TABLEAU IV

ESSAIS DE NISHIHARA-KAWAMOTO

Matériau: Acier à 0,34% C	Référence: [58]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: $\alpha=0$ $\beta=218$MPa	Trajet: Radial

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	110	201	0	0	526	0	-306	210	37	210	-3,7
2	109	205	0	0	534	0	-316	215	36	215	-1,4
3	204	174	0	0	608	0	-200	210	68	210	-3,7
4	207	179	0	0	620	0	-206	215	69	215	-1,4
5	280	137	0	0	672	0	-112	212	93	212	-2,8

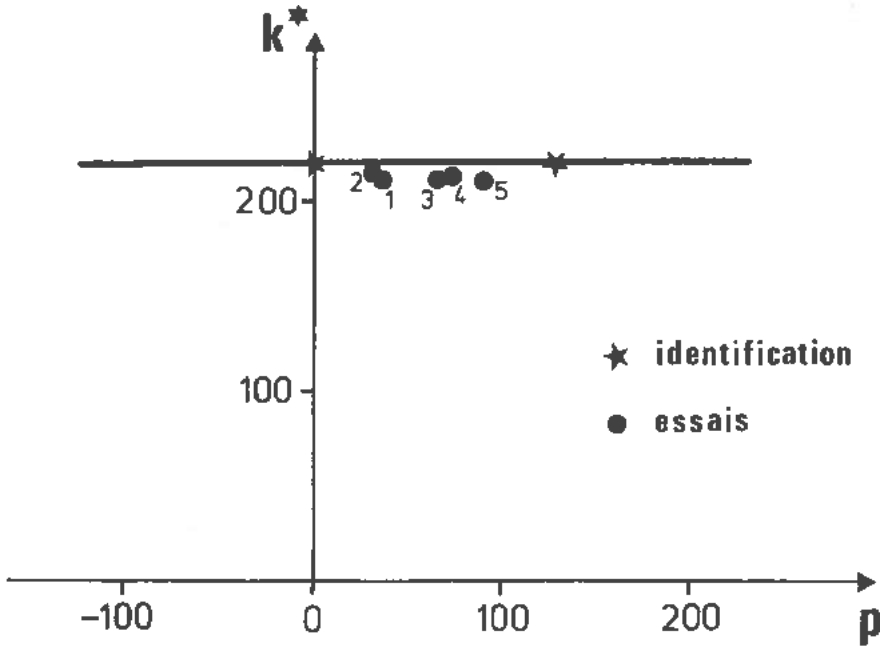


TABLEAU IV (suite)

ESSAIS DE NISHIHARA-KAWAMOTO

Matériau: Acier à 0,34% C	Référence: [58]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: $\alpha=0$ $\beta=218$MPa	Trajet: Radial

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	285	141	0	0	686	0	-116	217	95	217	-0,5
2	331	96	0	0	714	0	-52	214	110	214	-1,8
3	338	93	0	0	724	0	-48	216	113	216	-0,9
4	365	47	0	0	742	0	-12	216	122	216	-0,9
5	374	48	0	0	760	0	-12	221	125	221	+1,4

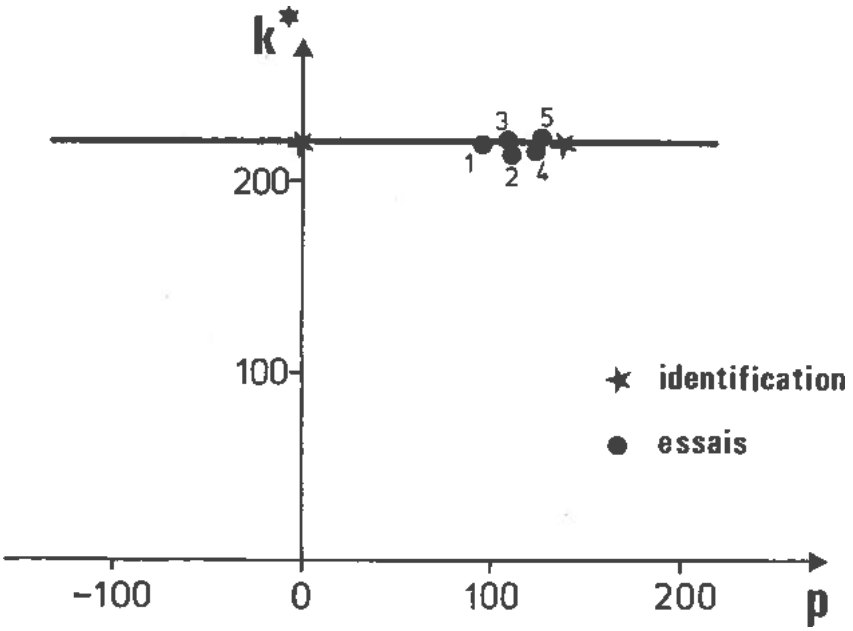


TABLEAU V

ESSAIS DE FINLEY ET AL.

Matériau: Acier SAE4340 (normes USA)	Référence: [19]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: α=0,13 β=286MPa	Trajet: Radial

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	354	177	0	0	854	0	-146	270	118	285	-0,3
2	265	230	0	0	796	0	-266	276	88	287	+0,3
3	155	276	0	0	728	0	-418	290	52	297	+3,8
4	462	0	0	0	924	0	0	267	154	286	-
5	0	286	0	0	286	0	-286	286	0	286	-

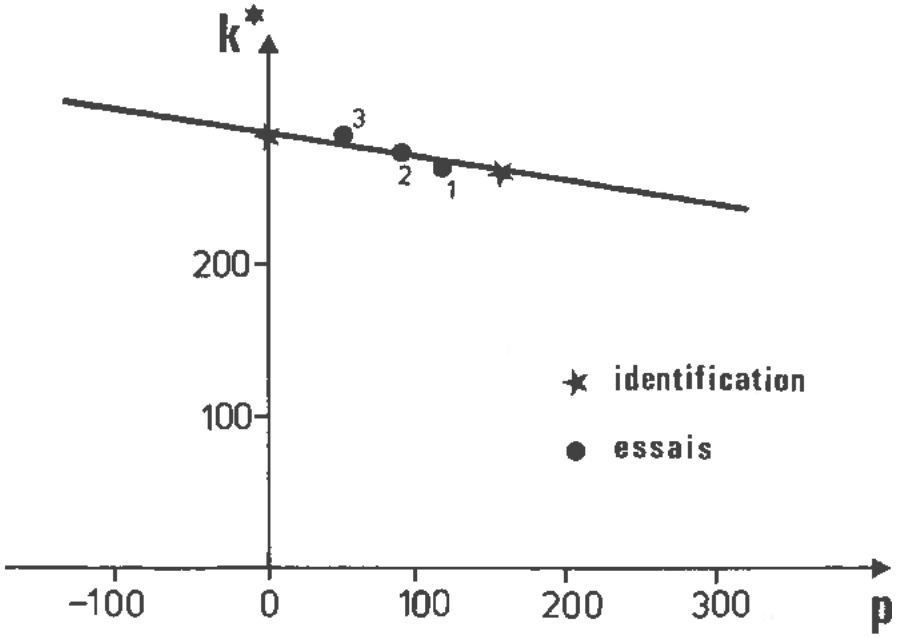


TABLEAU VI

ESSAIS DE MATAKE

Matériau: Laiton	Référence: [50]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: α=0,94 β=74MPa	Trajet: Radial

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	46	54	0	0	164	0	-72	60	15	74	0
2	64	37	0	0	162	0	-34	52	21	72	-2,7
3	83	0	0	0	166	0	0	48	28	74	-
4	0	74	0	0	74	0	-74	74	0	74	-

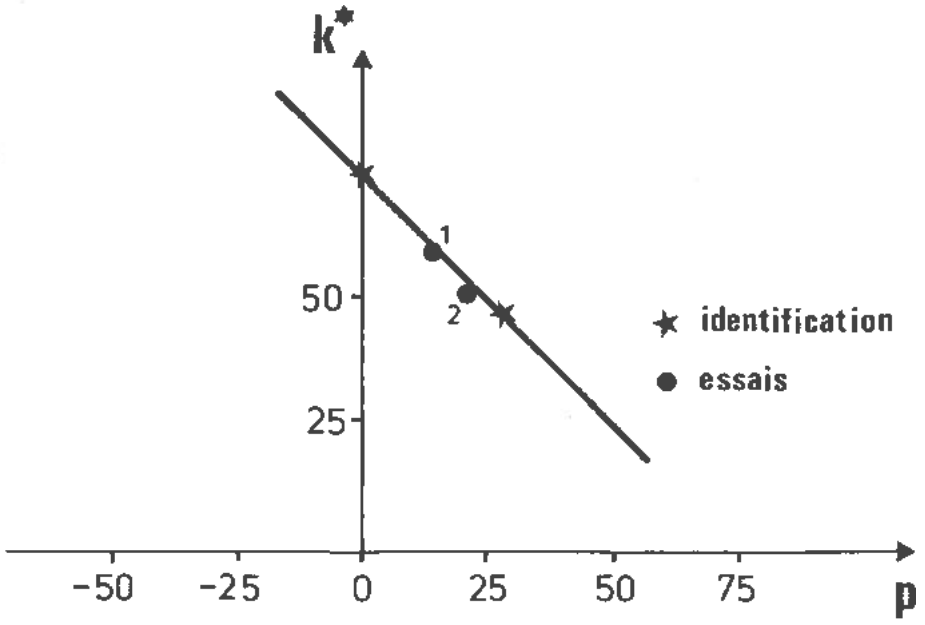


TABLEAU VI (suite)

ESSAIS DE MATAKE

Matériau: Fer forgé	Référence: [50]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: α=1,11 β=186MPa	Trajet: Radial

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	106	126	0	0	380	0	-168	140	35	179	-3,8
2	167	96	0	0	422	0	-88	136	56	198	+6,5
3	196	0	0	0	392	0	0	113	65	186	-
4	0	186	0	0	186	0	-186	186	0	186	-

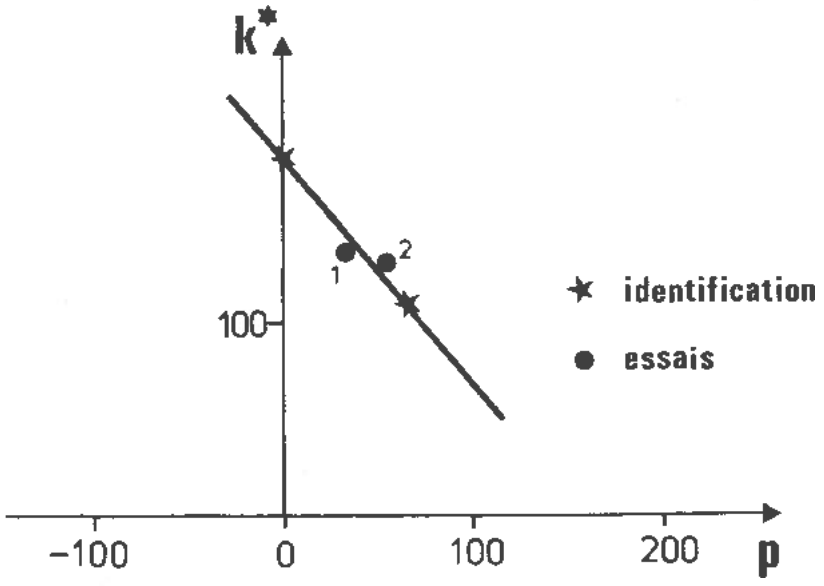


TABLEAU VI (suite)

ESSAIS DE MATAKE

Matériau: Acier haute résistance	Référence: [50]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: α=0,06 β=275MPa	Trajet: Radial

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	186	235	0	0	692	0	-320	259	62	263	-4,0
2	296	171	0	0	748	0	-156	242	99	248	-9,8
3	461	0	0	0	922	0	0	266	154	275	-
4	0	275	0	0	275	0	-275	275	0	275	-

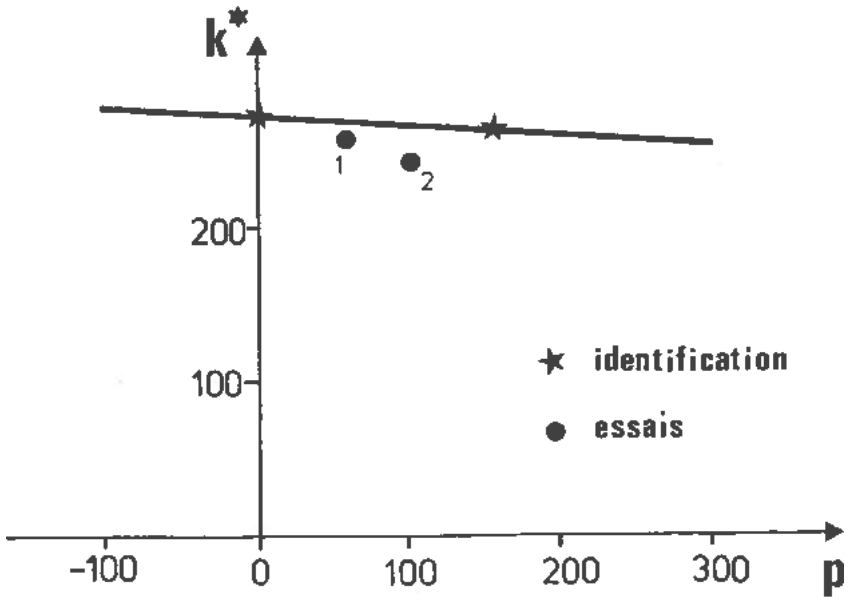


TABLEAU VII

ESSAIS DE KITAOKA ET AL.

Matériau: Acier C (recuit)	Référence: [41]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: α=0,11 β=160MPa	Trajet: Radial

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	242	134	0	0	460	0	-156	160	81	169	+5,6
2	204	104	0	0	496	0	-88	157	68	164	+2,5
3	248	71	0	0	534	0	-38	160	83	169	+5,6
4	260	0	0	0	520	0	0	150	87	160	-
5	0	160	0	0	160	0	-160	160	0	160	-

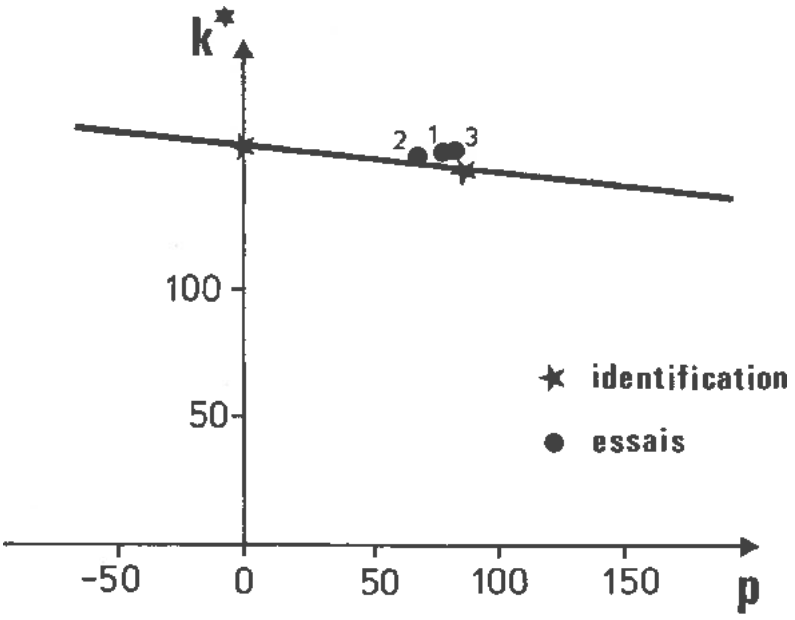


TABLEAU IIX

ESSAIS D'ENSAM Bordeaux

Matériau: Acier 30NCD16 (Lot n°1)	Référence: [26]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: α=0,34 β=405MPa	Trajet: Radial ou affine

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	315	315	0	0	1019	0	-389	364	105	400	-1,2
2	450	225	0	0	1086	0	-186	344	150	395	-2,5
3	435	215	0	200	1047	0	-177	331	145	380	-6,2
4	500	125	300	0	1059	0	-59	315	267	406	~0
5	420	140	600	0	925	0	-85	280	340	396	-2,2

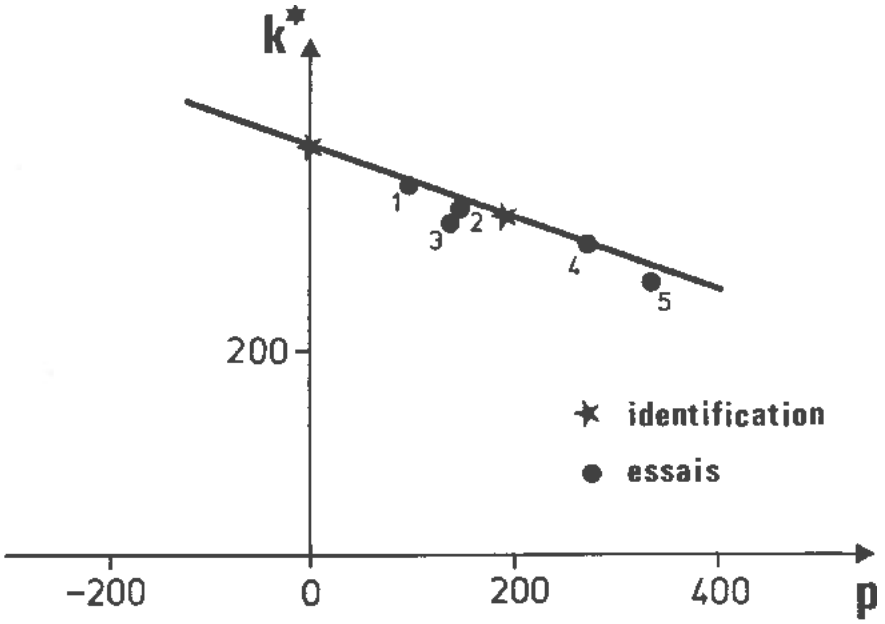
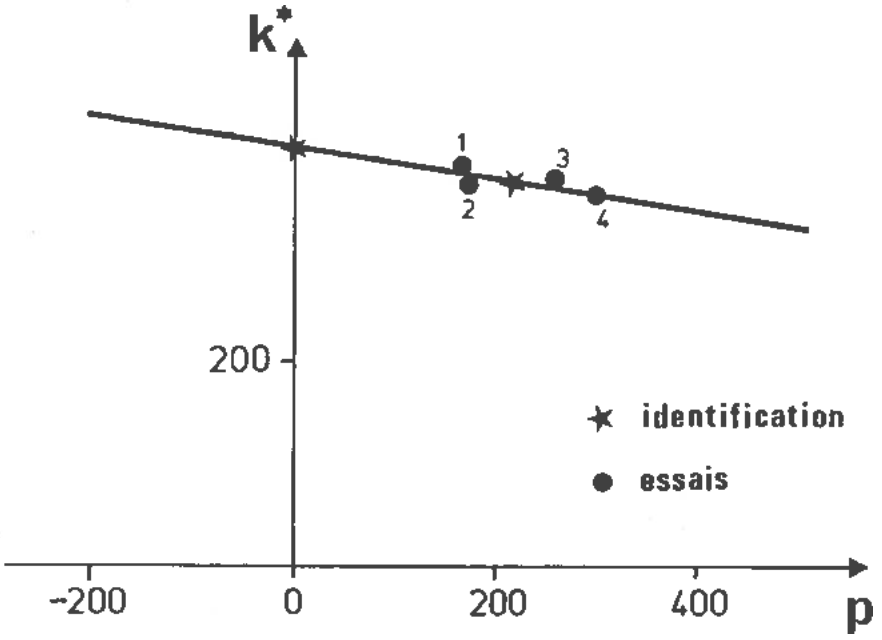


TABLEAU IIX (suite)

ESSAIS D'ENSAM Bordeaux

Matériau: Acier 30NDC16 (Lot n°2)	Référence: [26]
Eprouvette: Cylindre plein	Type d'essai: Flexion-Torsion
Constantes: α=0,13 β=410MPa	Trajet: Radial ou affine

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	485	280	0	0	1226	0	-256	396	162	417	+1,7
2	211	365	300	0	971	0	-549	385	170	407	-0,7
3	480	277	300	0	1213	0	-253	392	260	426	+3,9
4	590	148	300	0	1250	0	-70	371	297	410	0



IV.1.2 ESSAIS SUR DES TUBES MINCES

Nous disposons de deux groupes d'essais, ceux de Roš [65] et ceux de Rotvel [66]. Les essais de Roš consistaient à soumettre des tubes minces ouverts à une pression interne et à une traction longitudinale toutes deux répétées, c'est-à-dire de valeur minimale nulle, et telles que le trajet de chargement était radial. Les essais de Rotvel étaient effectués de la même manière, mais en superposant une pression externe et une compression longitudinale constantes, Rotvel obtenait un chargement radial alterné et non pas répété.

Dans tous les cas, l'état des contraintes qui règne dans la paroi du tube mince est biaxial. Le tenseur correspondant est de la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \Sigma_{\ell,a}\sin\omega t+\Sigma_{\ell,m} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\,\Sigma_{t,a}\sin\omega t+\Sigma_{t,m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.1.10)}$$

Le tenseur variation des contraintes $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ est alors :

$$\Delta\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 2\Sigma_{\ell,a} & 0 & 0 \\ 0 & 2\Sigma_{t,a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.1.11)}$$

En supposant que $\Sigma_{\ell,a}$ est supérieur à $\Sigma_{t,a}$, les valeurs principales de $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ sont :

$$\Delta\Sigma_1 = 2\Sigma_{\ell,a} \qquad \Delta\Sigma_2 = 2\Sigma_{t,a} \qquad \Delta\Sigma_3 = 0 \qquad \text{(IV.1.12)}$$

ou

$$\Delta\Sigma_1 = 2\Sigma_{\ell,a} \quad \Delta\Sigma_2 = 0 \qquad \Delta\Sigma_3 = -2\Sigma_{t,a} \qquad \text{(IV.1.13)}$$

suivant que les sollicitations sont en phase ou en opposition de phase. L'expression (IV.1.7) de k^* devient :

$$k^* = \left\{ \frac{1}{6} \left[(\Sigma_{\ell,a} \pm \Sigma_{t,a})^2 + \Sigma_{\ell,a}^2 + \Sigma_{t,a}^2 \right] \right\}^{1/2} \qquad \text{(IV.1.14)}$$

La pression maximale vaut :

$$p_{max} = \frac{1}{3} (tr\underline{\underline{\Sigma}}_m) + \frac{1}{6} |tr(\underline{\underline{\Delta\Sigma}})| = \frac{1}{3} (\Sigma_{\ell,m} + \Sigma_{t,m} + \Sigma_{\ell,a} \pm \Sigma_{t,a})$$

(IV.1.15)

L'interprétation des résultats expérimentaux de Roš et de Rotvel est présentée sous la forme standard utilisée précédemment.

TABLEAU IX

ESSAIS DE ROŠ

Matériau: Fonte	Référence: [65]
Eprouvette: Tube mince ouvert	Type d'essai: Pression interne + traction
Constantes: α=0,10 β=92MPa	Trajet: Radial

	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	$\Sigma_{1,m}$ (MPa)	$\Sigma_{2,m}$ (MPa)	$\Sigma_{3,m}$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	275	136	0	137,5	68	0	69	137	83	-9,8
2	240	235	0	120	117,5	0	69	158	85	-7,6
3	257	257	0	128,5	128,5	0	74	171	91	-1,1
4	266	124	0	133	62	0	67	130	80	-13,0
5	205	0	-215,5	102,5	0	-107,8	105	4	105	+14,0

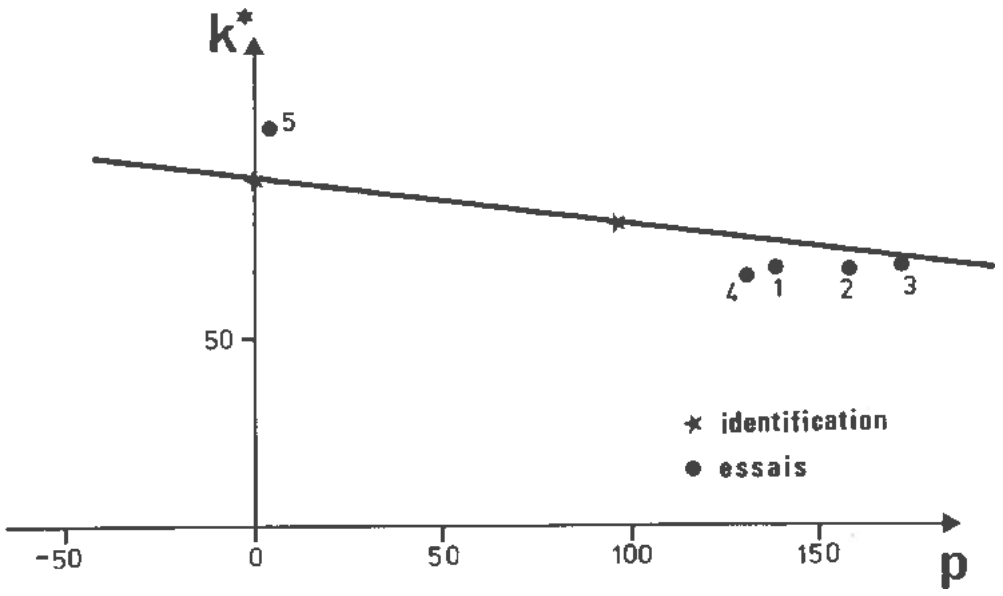


TABLEAU X

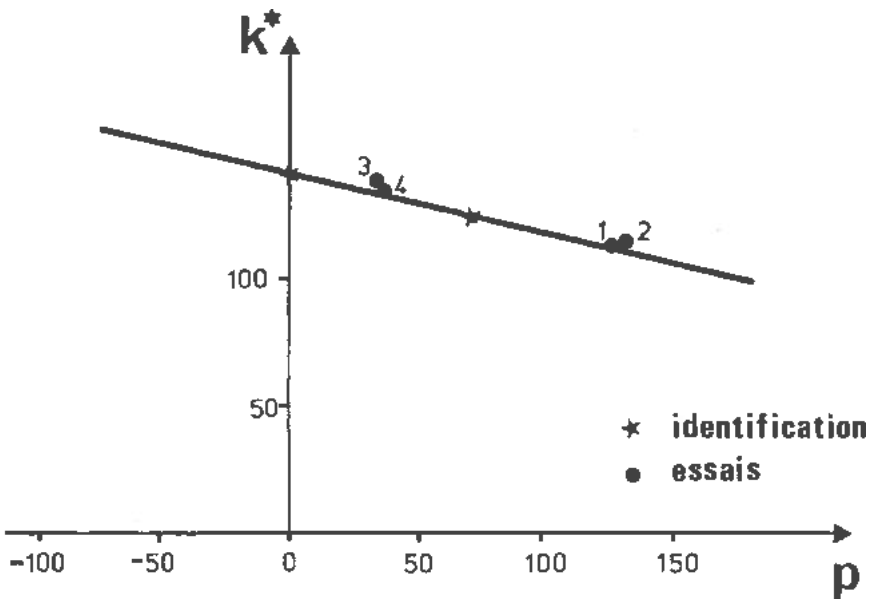
ESSAIS DE ROTVEL

Matériau: Acier à 0,35% C — Référence: [66]

Eprouvette: Tube mince ouvert — Type d'essai: Pression int-ext + traction-compression

Constantes: $\alpha=0,20$ $\beta=142$MPa — Trajet: Radial

	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	$\Sigma_{1,m}$ (MPa)	$\Sigma_{2,m}$ (MPa)	$\Sigma_{3,m}$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	442	348	0	0	0	0	116,5	132	143	+0,7
2	448	338	0	0	0	0	117	131	143	+0,7
3	316	0	-246	0	0	0	141	35	145	+2,1
4	240	0	-312	0	0	0	138,5	36	146	+2,8



IV.1.3 ESSAIS AVEC ETAT TRIAXIAL DES CONTRAINTES

Ces essais, réalisés par Crossland [8] et par White et al. [72], consistaient à solliciter en traction-compression asymétrique ou en torsion alternée, une éprouvette cylindrique pleine plongée dans une cellule remplie d'huile permettant d'imposer une pression hydrostatique élevée.

Ce mode de sollicitation conduit à un état triaxial des contraintes de la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \Sigma + \left(\Sigma_a \sin\omega t + \Sigma_m \right) & T_a \sin\omega t & 0 \\ T_a \sin\omega t & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.1.16)}$$

où, soit $T_a = 0$ si l'essai est en traction-compression, soit $\Sigma_a = \Sigma_m = 0$ s'il s'agit d'une torsion. Le trajet de chargement correspondant est alors affine et le tenseur variation des contraintes $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}$ est :

$$\Delta\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 2\Sigma_a & 2T_a & 0 \\ 2T_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.1.17)}$$

C'est le même qu'au paragraphe IV.1.1. Ses valeurs principales ont été calculées (équation IV.1.5) ainsi que le k^* correspondant (équation IV.1.8). La pression hydrostatique maximale vaut :

$$p_{max} = \Sigma + \frac{\Sigma_a + \Sigma_m}{3} \qquad \text{(IV.1.18)}$$

Le tableau suivant représente l'interprétation par notre critère, de l'ensemble des résultats expérimentaux de Crossland et de White et al.

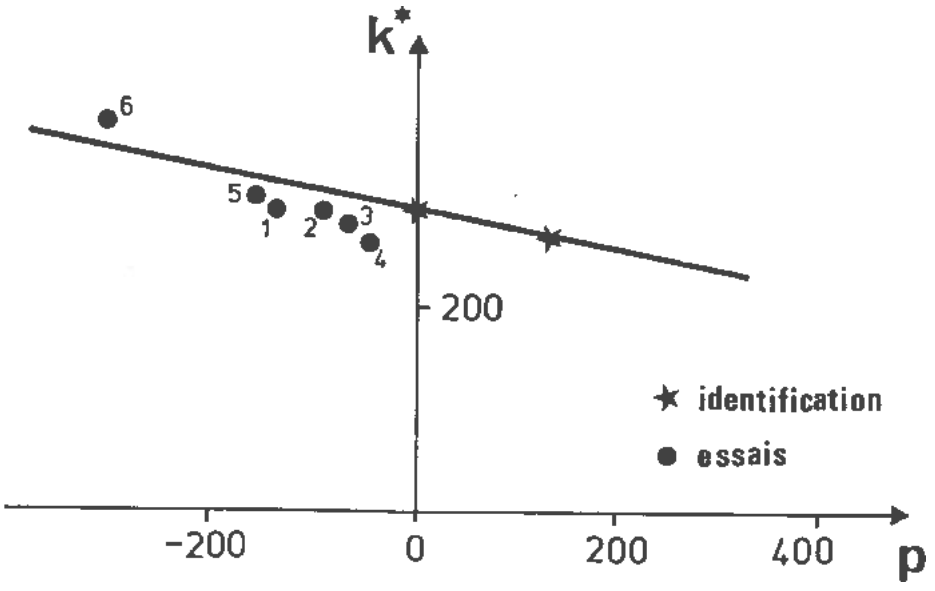
TABLEAU XI

ESSAIS DE CROSSLAND ET DE WHITE ET AL

Matériau: Acier En25T (normes Anglaises)
Eprouvette: Cylindre plein
Constantes: α=0,18 β=300MPa

Références: [8] [72]
Type d'essai: Pression externe + traction ou torsion
Trajet: Affine

	$\Delta\Sigma_1$ (MPa)	$\Delta\Sigma_2$ (MPa)	$\Delta\Sigma_3$ (MPa)	$\Sigma_{1,m}$ (MPa)	$\Sigma_{2,m}$ (MPa)	$\Sigma_{3,m}$ (MPa)	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1016	0	0	-309	-309	-309	293	-140	268	-10,7
2	1016	0	0	-151	-309	-309	293	-87	277	-7,7
3	968	0	0	-77	-309	-309	279	-70	266	-11,3
4	932	0	0	0	-309	-309	269	-51	260	-13,3
5	1078	0	0	-386	-309	-309	311	-155	283	-5,7
6	785	0	-785	-309	-309	-309	392,5	-309	337	+12,3



IV.1.4 SYNTHESE

La valeur absolue de I (équation IV.1.1) est une mesure de l'écart entre les résultats expérimentaux et les prédictions théoriques. Pour l'ensemble des essais à trajet radial ou affine présentés ici, cet écart est en moyenne de 4 % sans jamais dépasser 15 %. Cette précision peut être qualifiée d'excellente dans le cadre d'essais en fatigue.

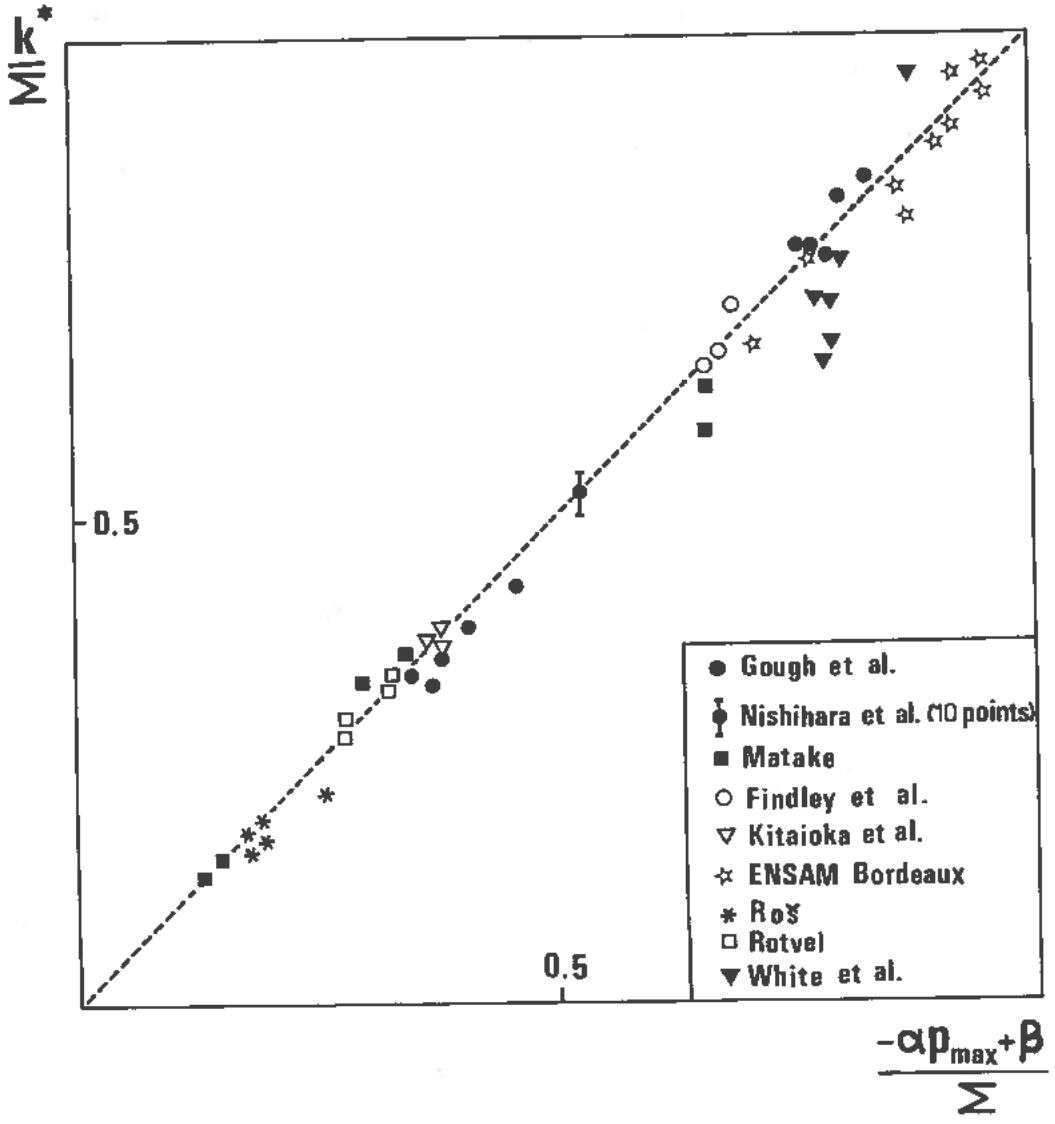


Figure IV.1 Ensemble des résultats expérimentaux pour des trajets de charge radiaux et affines.

Sur la figure IV.1, nous avons réuni l'ensemble des résultats expérimentaux étudiés en représentant les couples $\left(\frac{-\alpha p_{max} + \beta}{\Sigma}, \frac{k^*}{\Sigma}\right)$ associés à chaque essai. Σ est une constante de normalisation choisie égale à 410 MP_a, de manière à ce que tous les points expérimentaux se trouve dans un carré unitaire.

Nous remarquons que le critère de fatigue, représenté par la diagonale du carré, rend bien compte des résultats obtenus pour une large gamme de métaux.

IV-2 ESSAIS DE CHARGEMENT PERIODIQUE GENERAL

Les essais en fatigue tels que le trajet de chargement soit autre que radial ou affine sont rares. Néanmoins, il existe, dans la littérature, un nombre non négligeable de résultats expérimentaux concernant essentiellement deux types d'essais à trajet de chargement complexe :

- Essais sur des éprouvettes cylindriques pleines sollicitées en flexion et torsion sinusoïdale déphasées.

- Essais sur des tubes minces ouverts soumis à une pression interne et à une traction-compression, toutes deux sinusoïdales mais déphasées et/ou de fréquences différentes.

Dans les deux cas, le chargement ne dépend que de deux paramètres si bien que le trajet correspondant est une courbe plane. La détermination de k^*, liée à la recherche de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement (voir § III.4.1), se réduit donc à la construction du plus petit cercle circonscrit au trajet plan de chargement.

Pour chaque matériau testé, les constantes α et β du critère de fatigue sont identifiées par deux essais à

trajet radial. L'écart entre un résultat expérimental et sa prédiction théorique est mesuré par l'indice I défini dans le paragraphe IV.1 précédent (voir équation IV.1.1).

IV.2.1 ESSAIS EN FLEXION ET TORSION DEPHASEES

Lors de toute sollicitation en flexion-torsion, le tenseur des contraintes macroscopiques est de la forme

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}(t) & \Sigma_{12}(t) & 0 \\ \Sigma_{21}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.2.1)}$$

et le déviateur macroscopique correspondant est :

$$\underline{\underline{S}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\Sigma_{11}(t) & \Sigma_{12}(t) & 0 \\ \Sigma_{21}(t) & -\frac{1}{3}\Sigma_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\Sigma_{11}(t) \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.2.2)}$$

Nous savons (voir § III.4) que le critère de plasticité du cristal peut se mettre sous la forme,

$$\frac{1}{2}\,[\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{z}}(t)]:[\underline{\underline{S}}(t)-\underline{\underline{z}}(t)] - k^2 \leqslant 0 \qquad \text{(IV.2.3)}$$

en utilisant la relation de passage

$$\underline{\underline{s}}(t) = \underline{\underline{S}}(t)+\underline{\underline{\rho}}(t) \qquad \text{(IV.2.4)}$$

et le changement de variables

$$\underline{\underline{z}}(t) = \underline{\underline{a}}(t) - \underline{\underline{\rho}}(t) \qquad \text{(IV.2.5)}$$

Il est naturel de supposer que le tenseur $\underline{\underline{z}}$ est à priori de la même forme que le déviateur macroscopique $\underline{\underline{S}}(t)$, c'est-à-dire que :

$$\underline{\underline{z}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} z_{11}(t) & z_{12}(t) & 0 \\ z_{21}(t) & -\frac{1}{3} z_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} z_{11}(t) \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.2.6)}$$

Grâce aux relations (IV.2.2) et (IV.2.6), le critère de plasticité du cristal (équation IV.2.3) s'écrit aussi :

$$\left\{ [\Sigma_{11}(t) - z_{11}(t)]^2 + \left[\sqrt{3}\Sigma_{12}(t) - \sqrt{3} z_{12}(t)\right]^2 \right\}^{1/2} \leqslant \sqrt{3}k \qquad \text{(IV.2.7)}$$

Dans notre méthode d'évaluation de l'état adapté (voir § III.4.1), le tenseur $\underline{\underline{z}}^*$ est la solution d'un problème de min-max (équation III.4.16) qui s'écrit ici :

$$\min_{z_{11}, z_{12}} \left\{ \max_{t \in T} \left[(\Sigma_{11}(t) - z_{11})^2 + \left(\sqrt{3}\Sigma_{12}(t) - \sqrt{3} z_{12}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} \qquad \text{(IV.2.8)}$$

L'équation (IV.2.1) montre que le trajet de tout chargement périodique de type flexion-torsion est une courbe fermée du plan $(\Sigma_{11}, \Sigma_{12})$ des contraintes. Mais, si nous utilisons le plan $\left(\Sigma_{11}, \sqrt{3}\Sigma_{12}\right)$, dans lequel le trajet du chargement est encore une courbe Φ' fermée, le problème de min-max (équation IV.2.8) traduit alors la recherche du plus petit

cercle circonscrit à Φ'. Le centre de ce cercle est donc $\left(z^*_{11},\ \sqrt{3}\ z^*_{12}\right)$ et son rayon $\sqrt{3}k^*$ (voir Fig. IV.2).

Nous allons utiliser cette caractérisation de l'état adapté dans le cas où la flexion et la torsion sont des fonctions sinusoïdales de même fréquence mais déphasées, qui oscillent autour de valeurs moyennes, i.e.

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_{11}(t) &= \Sigma_a \sin\omega t + \Sigma_m \\ \Sigma_{12}(t) &= T_a \sin(\omega t - \varphi) + T_m\end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.2.9)}$$

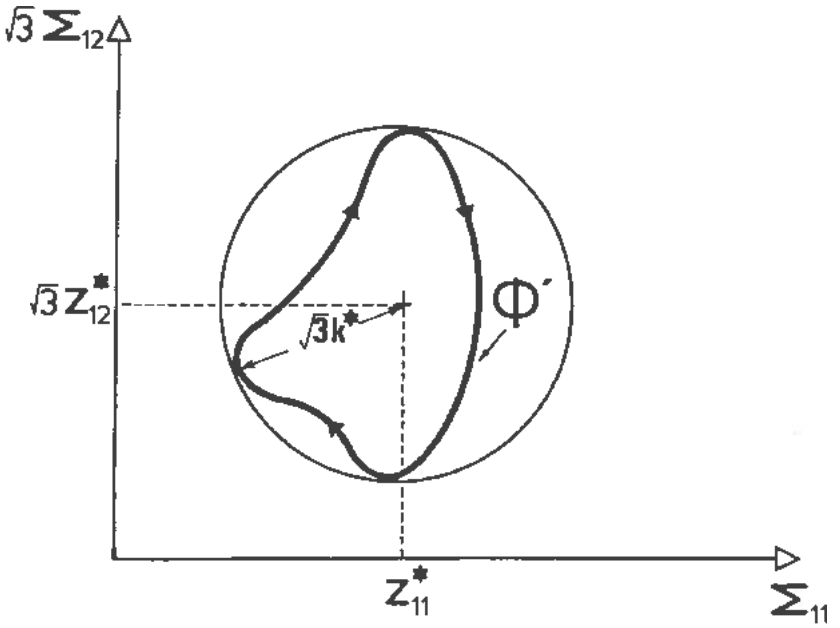


Figure IV.2 Trajet de chargement dans le plan $\left(\Sigma_{11},\ \sqrt{3}\Sigma_{12}\right)$ d'un essai périodique en flexion-torsion.

Le trajet de chargement Φ' dans le plan $\left(\Sigma_{11},\ \sqrt{3}\Sigma_{12}\right)$ est alors une ellipse dont le centre de symétrie O' a pour coordonnées $\left(\Sigma_m,\ \sqrt{3}T_m\right)$ (voir Fig. IV.3). Son demi-grand axe vaut,

$$a = \left[\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4C^2} \right]^{1/2} \qquad \text{(IV.2.10)}$$

et son demi-petit axe

$$b = \left[\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4C^2} \right]^{1/2} \qquad \text{(IV.2.11)}$$

où A, B et C sont donnés par

$$A = \Sigma_a^2 + 3T_a^2 \ , \ B = \Sigma_a^2 - 3T_a^2 \ , \ C = \sqrt{3}\Sigma_a T_a \sin\varphi \qquad \text{(IV.2.12)}$$

L'angle γ formé par le grand axe et l'axe Σ_{11} est tel que (Fig. IV.3)

$$\cos 2\gamma = \frac{2B}{\sqrt{A^2 - 4C^2}} \qquad \text{(IV.2.13)}$$

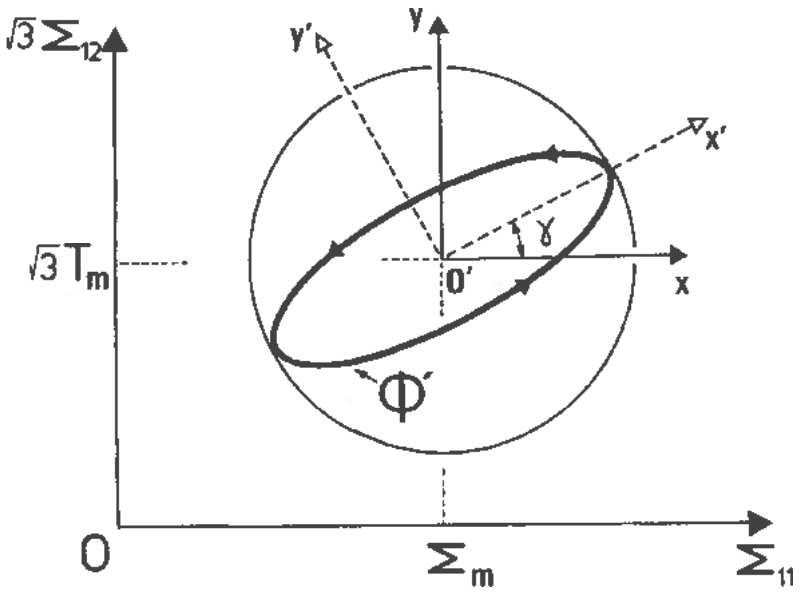


Figure IV.3 Trajet de chargement pour un essai en flexion-torsion sinusoïdales déphasées de même fréquence.

Pour se placer dans le repère (O'.x'y') lié aux axes de l'ellipse, il faut utiliser le changement de variables suivant :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{11} \\ \sqrt{3}\tilde{\Sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11}-\Sigma_m \\ \sqrt{3}\Sigma_{12}-\sqrt{3}T_m \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.2.14)}$$

et l'équation de l'ellipse devient alors :

$$\left(\frac{\tilde{\Sigma}_{11}}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\ \tilde{\Sigma}_{12}}{b} \right)^2 = 1 \qquad \text{(IV.2.15)}$$

Le plus petit cercle circonscrit à une ellipse de centre O' et de demi-grand axe a est, d'une manière évidente, le cercle de rayon a, centré en O'. Dans le cas considéré, l'état adapté est défini donc par :

$$z^*_{11} = \Sigma_m \ , \quad \sqrt{3}z^*_{12} = \sqrt{3}T_m \qquad \text{(IV.2.16)}$$

et

$$k^* = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad \text{(IV.2.17)}$$

où a est donné par l'équation (IV.2.10). Le tenseur complet $\underline{\underline{z}}^*$ est, d'après (IV.2.6)

$$\underline{\underline{z}}^{*} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\Sigma_m & T_m & 0 \\ T_m & -\frac{1}{3}\Sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\Sigma_m \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.2.18)}$$

De plus, la pression hydrostatique maximale vaut alors

$$P_{max} = \frac{\Sigma_a + \Sigma_m}{3} \qquad \text{(IV.2.19)}$$

Les résultats expérimentaux obtenus par Nishihara-Kawamoto [59], Heidenreich-Zenner [34] et de l'ENSAM Bordeaux [26], correspondent tous à des essais en flexion et torsion sinusoïdales de même fréquence, déphasées, avec ou sans contraintes moyennes.

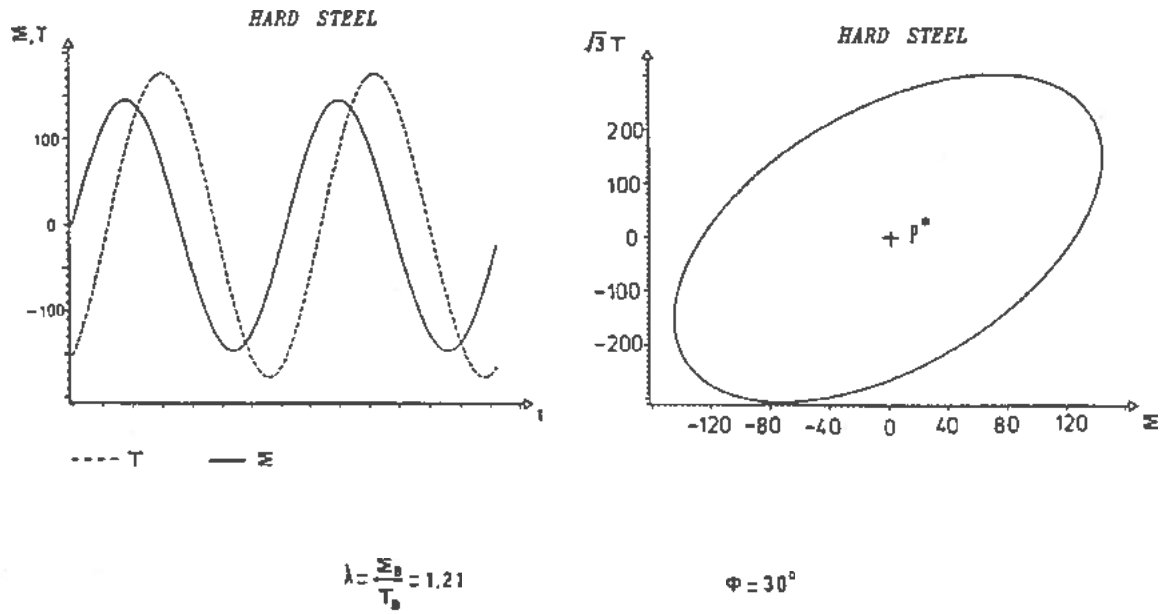


Figure IV.4 Evolution des contraintes et trajet de charge dans le plan $\left(\Sigma_{11}, \sqrt{3}\ \Sigma_{12}\right)$, pour un essai de Nishihara-Kawamoto.

Sur la figure IV.4, l'évolution des contraintes macroscopiques dans le temps, ainsi que le trajet de charge correspondant, pour un essai de Nishihara-Kawamoto, sont présentés à titre d'exemple. Tous ces essais peuvent être interprétés par notre critère de fatigue en utilisant les valeurs de k^* et p_{max} données par les équations (III.2.17) et (III.2.19), les constantes α et β du critère étant déterminées à partir des limites d'endurance en flexion et torsion alternées. Pour les quatre groupes d'essais présentés ci-après, l'écart entre l'expérience et la prédiction théorique est encore mesuré par l'indice I défini dans le paragraphe IV.1 (équation IV.1.1).

TABLEAU XII

ESSAIS DE NISHIHARA-KAWAMOTO

Matériau: Acier doux — Type d'essai: Flexion-Torsion

Eprouvette: Cylindre plein — $\Sigma_{11}(t)=\Sigma_a \sin\omega t$

Référence: [59] — $\Sigma_{12}(t)=T_a \sin(\omega t-\varphi)$

Constantes: $\alpha=0,02$ $\beta=137$MPa

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	φ	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	103	125	0	0	60°	129	34	130	-5
2	109	131	0	0	90°	131	36	132	-4
3	192	96	0	0	60°	128	64	129	-6
4	201	101	0	0	90°	116	67	117	-14
5	230	48	0	0	90°	133	77	135	-2

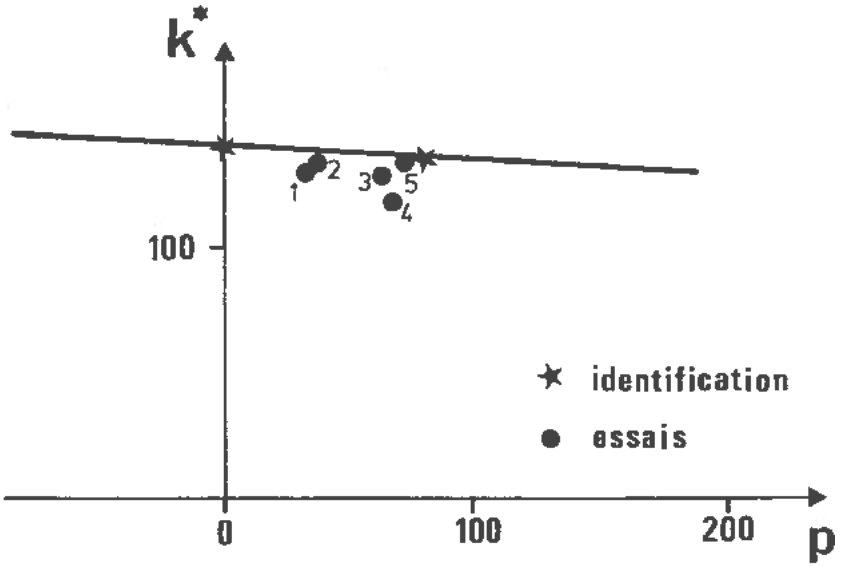


TABLEAU XII (suite)

ESSAIS DE NISHIHARA-KAWAMOTO

Matériau: Acier dur — Type d'essai: Flexion-Torsion

Eprouvette: Cylindre plein — $\Sigma_{11}(t)=\Sigma_a \sin\omega t$

Référence: [59] — $\Sigma_{12}(t)=T_a \sin(\omega t-\varphi)$

Constantes: $\alpha=0,14$ $\beta=196$MPa

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	φ	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	140	170	0	0	30°	185	47	192	-2
2	145	176	0	0	60°	182	48	189	-4
3	150	181	0	0	90°	181	50	188	-4
4	250	125	0	0	30°	185	83	197	+1
5	252	126	0	0	60°	168	84	180	-8
6	258	129	0	0	90°	149	86	161	-18
7	304	64	0	0	90°	176	101	190	-3

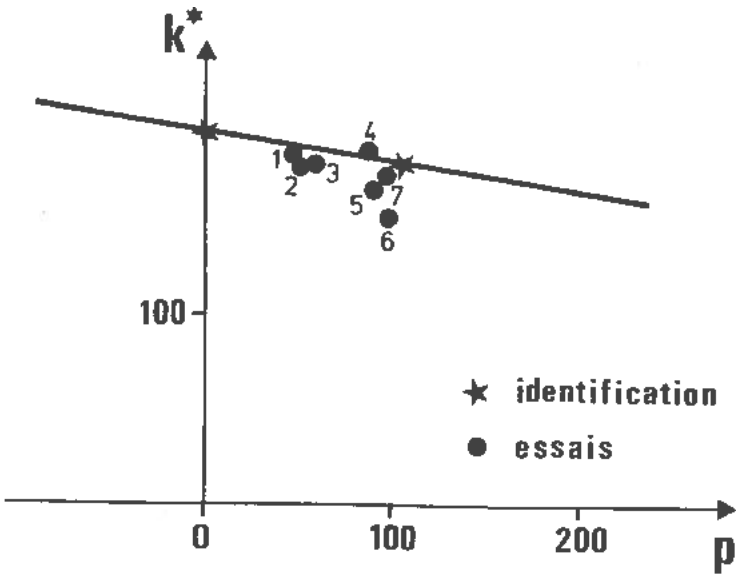


TABLEAU XIII

ESSAIS DE HEIDENREICH-ZENNER

Matériau: Acier 34Cr4V — Type d'essai: Flexion-Torsion

Eprouvette: Cylindre plein — $\Sigma_{11}(t)=\Sigma_a \sin\omega t+\Sigma_m$

Référence: [34] — $\Sigma_{12}(t)=T_a \sin(\omega t-\varphi)+T_m$

Constantes: $\alpha=0,16$ $\beta=259$MPa

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	φ	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	315	163	0	0	60°	212	105	229	-12
2	315	163	0	0	90°	182	105	199	-23
3	225	225	0	0	90°	225	75	237	-9
4	351	88	0	0	90°	203	117	222	-14
5	128	256	0	0	90°	256	43	263	+2
6	315	158	0	158	60°	210	105	227	-12
7	315	158	0	158	90°	182	105	199	-23
8	283	142	283	0	90°	164	189	194	-25

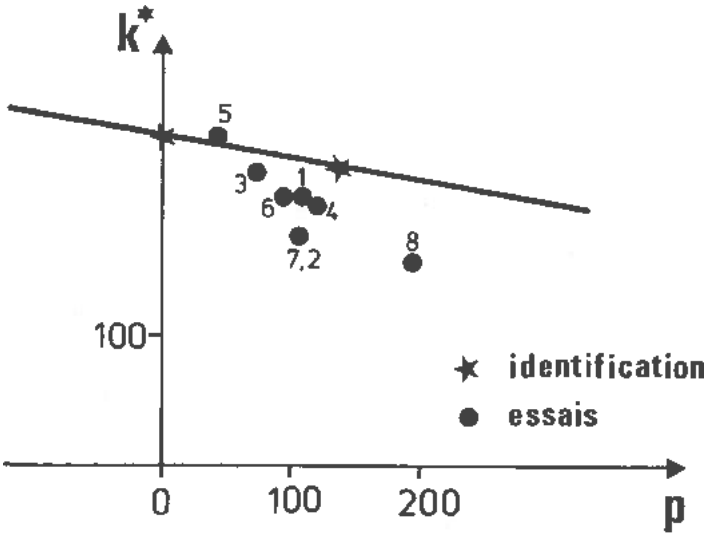


TABLEAU XIV

ESSAIS D'ENSAM Bordeaux

Matériau: Acier 30NCD16 (lot 2)

Eprouvette: Cylindre plein

Référence: [26]

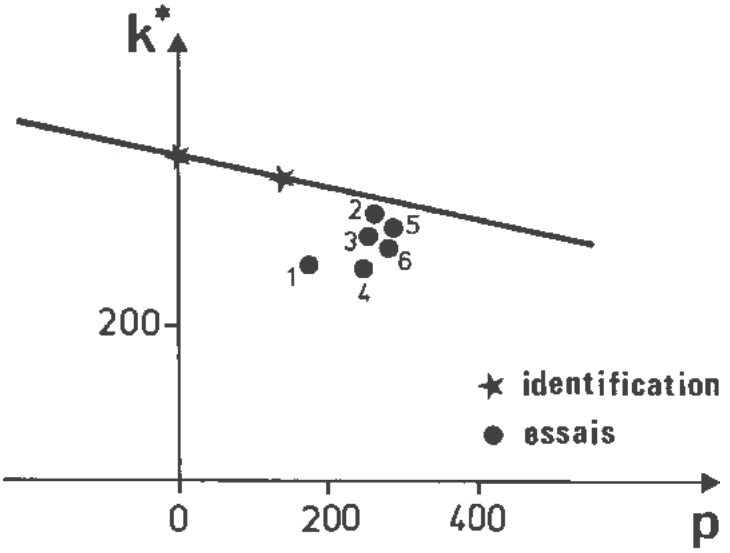
Constantes: $\alpha=0,13$ $\beta=410MPa$

Type d'essai: Flexion-Torsion

$\Sigma_{11}(t)=\Sigma_a \sin\omega t+\Sigma_m$

$\Sigma_{12}(t)=T_a \sin(\omega t-\varphi)$

	Σ_a (MPa)	T_a (MPa)	Σ_m (MPa)	T_m (MPa)	φ	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	480	277	0	0	90°	277	160	298	-27
2	480	277	300	0	45°	362	260	396	-3
3	470	271	300	0	60°	332	257	365	-11
4	473	273	300	0	90°	273	258	307	-25
5	565	141	300	0	45°	342	288	379	-8
6	540	135	300	0	90°	312	280	348	-15



IV.2.2 ESSAIS DE CHARGEMENT PERIODIQUE GENERAL AVEC DIRECTIONS PRINCIPALES DU TENSEUR DES CONTRAINTES FIXES

Dans cette catégorie, les seuls résultats expérimentaux dont nous disposons sont ceux d'Issler [39] et de Mc Diarmid [54]. Dans les deux cas, il s'agit de tubes minces ouverts soumis à une pression interne et à une traction longitudinale. Dans la paroi du tube, l'état des contraintes est alors biaxial. La contrainte normale circonférentielle est due à la pression interne et la contrainte normale longitudinale à la traction. En tout point de la paroi, le repère défini par les directions tangentielle, longitudinale et radial du tube, est donc le repère principal fixe du tenseur des contraintes (Fig. IV.5).

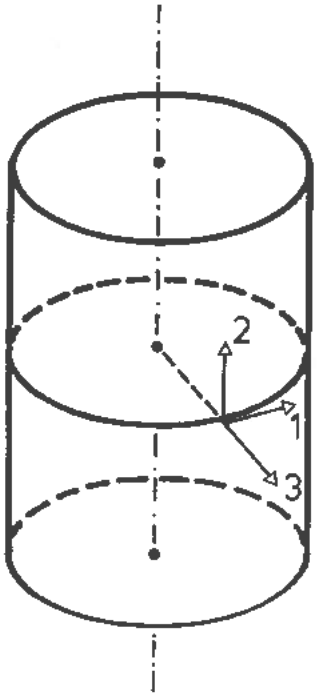


Figure IV.5 Repère principal du tenseur des contraintes pour des tubes minces sollicités en pression interne et traction longitudinale.

D'une manière plus générale, lors d'un essai de chargement avec directions principales du tenseur des contraintes fixes, nous avons :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \Sigma_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_3(t) \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.2.20)}$$

où $\Sigma_1(t)$, $\Sigma_2(t)$, $\Sigma_3(t)$ sont les contraintes principales. Nous pouvons donc adopter une représentation vectorielle de l'état des contraintes en posant :

$$\underline{\Sigma}(t) = \Sigma_1(t)\underline{i} + \Sigma_2(t)\underline{j} + \Sigma_3(t)\underline{k} \qquad \text{(IV.2.21)}$$

où $(\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ est une base orthonormée du repère principal fixe. La même convention peut être adoptée pour le déviateur des contraintes macroscopiques $\underline{S}(t)$:

$$\underline{S}(t) = S_1(t)\underline{i} + S_2(t)\underline{j} + S_3(t)\underline{k} \qquad \text{(IV.2.22)}$$

où

$$\left.\begin{aligned} S_1(t) &= \frac{1}{3}\,[2\Sigma_1(t)-\Sigma_2(t)-\Sigma_3(t)\,] \\ S_2(t) &= \frac{1}{3}\,[2\Sigma_2(t)-\Sigma_1(t)-\Sigma_3(t)\,] \\ S_3(t) &= \frac{1}{3}\,[2\Sigma_3(t)-\Sigma_1(t)-\Sigma_2(t)\,] \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.2.23)}$$

Par définition, la somme des composantes du vecteur $\underline{S}$ est nulle, si bien que $\underline{S}$ appartient toujours au plan déviatorique Π (dit aussi plan octaédrique) qui est, dans la

représentation vectorielle adoptée, le plan de normale $\underline{w}$, où $\underline{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})$. Par conséquent, lors d'un chargement périodique avec directions principales du tenseur des contraintes fixes, le trajet du déviateur se réduit à une courbe fermée Φ' plane puisqu'incluse dans le plan déviatorique Π alors fixe (Fig. IV.6). Soient $(\underline{u},\underline{v})$ deux vecteurs tels que, joints à la normale $\underline{w}$, du plan Π, ils forment une base orthonormée de l'espace. Ce sont bien sûr, des vecteurs du plan Π. Conformément à la figure IV.6, nous choisissons :

$$\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \\ \underline{k} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.2.24)}$$

Il est légitime de supposer que le déviateur des contraintes microscopiques $\underline{\underline{s}}(t)$ ainsi que le tenseur déviatorique $\underline{\underline{z}} = \underline{\underline{a}} - \underline{\underline{\rho}}$ ont la même forme que le déviateur macroscopique $\underline{\underline{S}}(t)$. Nous adoptons donc pour $\underline{\underline{s}}(t)$ et $\underline{\underline{z}}$ la même représentation vectorielle que pour $\underline{\underline{S}}(t)$, à savoir :

$$\underline{\underline{s}}(t) = s_1(t)\underline{i} + s_2(t)\underline{j} + s_3(t)\underline{k} \qquad \text{(IV.2.25)}$$

et

$$\underline{\underline{z}} = z_1\underline{i} + z_2\underline{j} + z_3\underline{k} \qquad \text{(IV.2.26)}$$

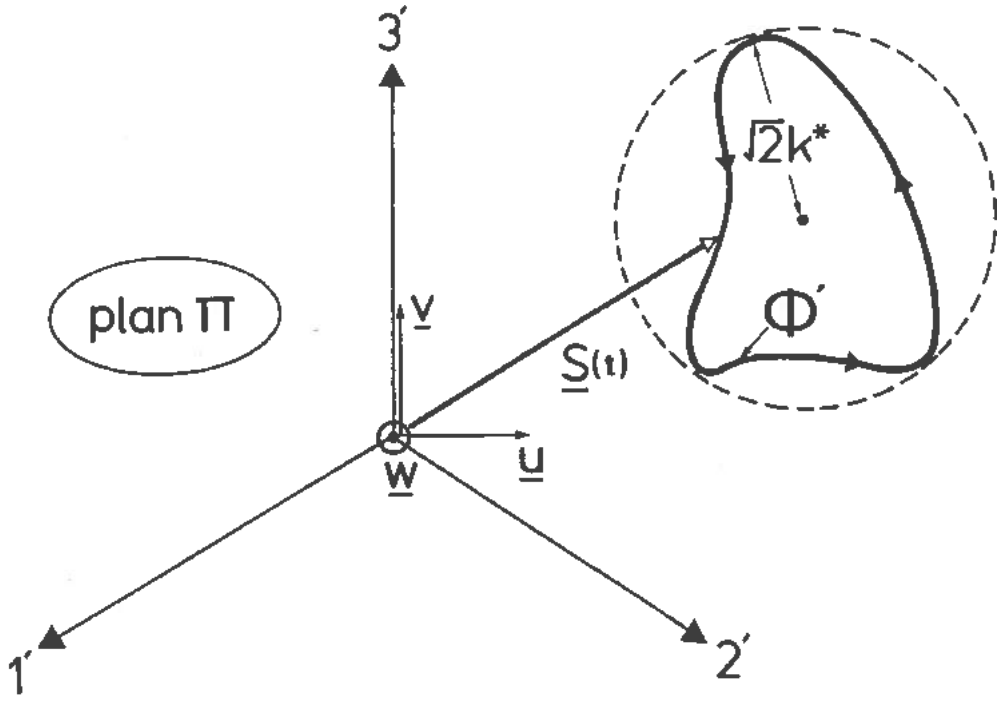


Figure IV.6 Trajet du déviateur dans le plan déviatorique Π, fixe.

Puisque $\underline{\underline{S}}(t)$, $\underline{\underline{s}}(t)$ et $\underline{\underline{z}}$ sont des déviateurs, $\underline{S}(t)$, $\underline{s}(t)$ et $\underline{z}$ sont des vecteurs du plan Π. Par conséquent, dans la base $(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$, leurs composantes sont respectivement $(S_u,S_v,0)$, $(s_u,s_v,0)$ et $(z_u,z_v,0)$. A l'aide de la matrice inverse de l'équation (IV.2.24), nous pouvons exprimer les composantes respectives de $\underline{S}$, $\underline{s}$ et $\underline{z}$ dans la base $(\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ en fonction de celles dans la base $(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, s_u - \frac{1}{\sqrt{6}}\, s_v \\ s_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, s_u - \frac{1}{\sqrt{6}}\, s_v \\ s_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\, s_v \end{aligned}\right| \qquad \text{(IV.2.27)}$$

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, s_u - \frac{1}{\sqrt{6}}\, s_v \\ s_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, s_u - \frac{1}{\sqrt{6}}\, s_v \\ s_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\, s_v \end{aligned}\right| \qquad \text{(IV.2.28)}$$

et

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, z_u - \frac{1}{\sqrt{6}}\, z_v \\ z_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, z_u - \frac{1}{\sqrt{6}}\, z_v \\ z_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\, z_v \end{aligned}\right| \qquad \text{(IV.2.29)}$$

Le critère de von Mises du cristal s'écrit :

$$\frac{1}{2}(\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}}):(\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}})-k^2 \leqslant 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left[(s_1-a_1)^2+(s_2-a_2)^2+(s_3-a_3)^2\right] \leqslant k^2$$

(IV.2.30)

En tenant compte de la relation de passage à l'échelle microscopique ($\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\rho}}$), du changement des variables ($\underline{\underline{z}} = \underline{\underline{a}} - \underline{\underline{\rho}}$) et des équations (IV.2.27), (IV.2.28) et (IV.2.29), le critère de von Mises (équation IV.2.30), devient :

$$\frac{1}{2}\left[(S_u-z_u)^2+(S_v-z_v)^2\right] - k^2 \leqslant 0 \qquad \text{(IV.2.31)}$$

Le problème de min-max (équation III.4.16) qui permet d'obtenir l'évaluation de $\underline{\underline{z}}^*$ de l'état adapté du cristal, s'écrit donc simplement :

$$\min_{z_u, z_v} \left\{ \max_{t\in T} \left[(S_u(t)-z_u)^2+(S_v(t)-z_v)^2\right]^{\frac{1}{2}} \right\} \qquad \text{(IV.2.32)}$$

Ce problème équivaut à la recherche du plus petit cercle circonscrit à la courbe Φ' du plan Π, décrite paramétriquement par $S_u(t)$, et $S_v(t)$. (Voir Fig. IV.6). Le rayon de ce cercle est égal à $\sqrt{2}\ k^*$ et les coordonnées de son centre sont $\left(z_u^*, z_v^*, 0\right)$ dans la base $(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$. Le tenseur complet $\underline{\underline{z}}^*$ peut alors être reconstitué grâce au système d'équations (IV.2.29) :

$$\underline{\underline{z}}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}z_u^* - \frac{1}{\sqrt{6}}z_v^* & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}z_u^* - \frac{1}{\sqrt{6}}z_v^* & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\ z_v^* \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.2.33)}$$

Examinons maintenant le cas particulier où les contraintes principales sont sinusoïdales de même fréquence mais déphasées :

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_1(t) &= \Sigma_{1,a}\sin\omega t + \Sigma_{1,m}\\ \Sigma_2(t) &= \Sigma_{2,a}\sin(\omega t-\varphi) + \Sigma_{2,m}\\ \Sigma_3(t) &= \Sigma_{3,a}\sin(\omega t-\theta) + \Sigma_{3,m}\end{aligned}\right| \qquad \text{(IV.2.34)}$$

La courbe Φ', qui représente le trajet de charge dans le plan déviatorique Π, est alors une ellipse.

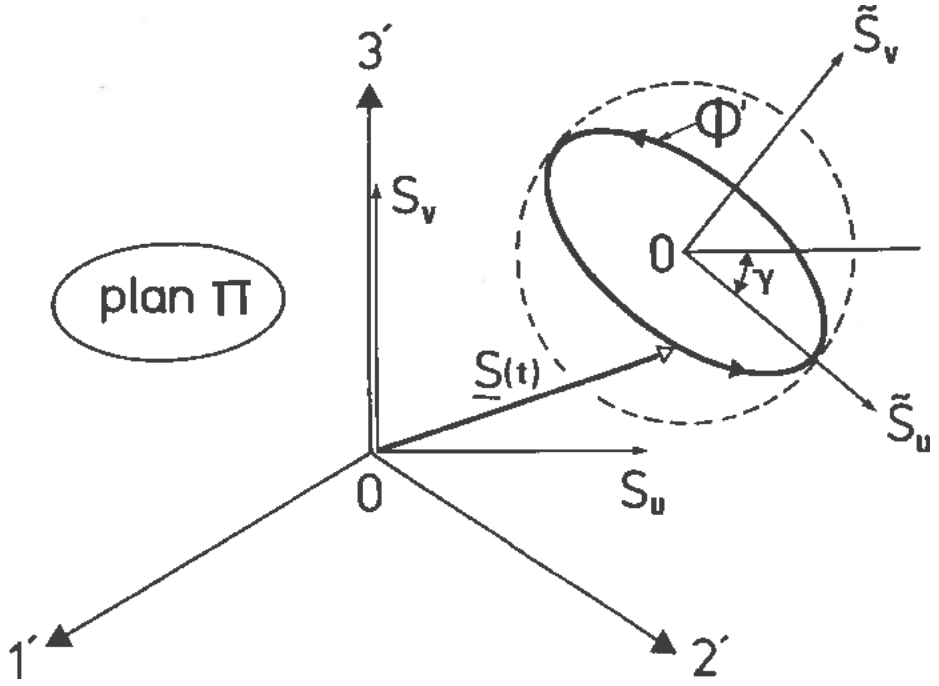


Figure IV.7 Trajet de charge dans le plan Π, pour des contraintes principales sinusoïdales de même fréquence, déphasées.

Son centre de symétrie O' (Fig. IV.7) est défini par le déviateur macroscopique moyen $\underline{\underline{S}}_m$ dont le vecteur représentatif $\underline{S}_m$ a, dans la base $(\underline{i},\underline{j},\underline{k})$, les composantes,

$$\left.\begin{aligned} S_{1,m} &= \frac{1}{3}\,(\,2\Sigma_{1,m}-\Sigma_{2,m}-\Sigma_{3,m}\,) \\ S_{2,m} &= \frac{1}{3}\,(\,2\Sigma_{2,m}-\Sigma_{1,m}-\Sigma_{3,m}\,) \\ S_{3,m} &= \frac{1}{3}\,(\,2\Sigma_{3,m}-\Sigma_{1,m}-\Sigma_{2,m}\,) \end{aligned}\right| \qquad \text{(IV.2.35)}$$

et dans la base $(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$, les composantes $(S_{u,m},S_{v,m},0)$ telles que

$$\left.\begin{aligned} S_{u,m} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,S_{2,m} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,S_{3,m} \\ S_{v,m} &= -\frac{1}{\sqrt{6}}\,S_{1,m} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,S_{2,m} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,S_{3,m} \end{aligned}\right| \qquad \text{(IV.2.36)}$$

Le point O' étant aussi le centre du plus petit cercle circonscrit à l'ellipse Φ', centre dont les coordonnées sont, par (IV.2.32), $\left(z_u^*,z_v^*,0\right)$:

$$\left.\begin{aligned} z_u^* &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,S_{2,m}-S_{3,m}\,) \\ z_v^* &= -\frac{1}{\sqrt{6}}\,(\,S_{1,m}+S_{2,m}-2S_{3,m}\,) \end{aligned}\right| \qquad \text{(IV.2.37)}$$

où $S_{1,m}$, $S_{2,m}$ et $S_{3,m}$ sont donnés par les équations (IV.2.35). D'autre part, le demi-grand axe de l'ellipse Φ' vaut :

$$a = \left[\frac{C_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_2}{2}\right)^2 - \frac{C_3}{C_1}} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(IV.2.38)}$$

et son demi-petit axe

$$b = \sqrt{C_2 - a^2} \qquad \text{(IV.2.39)}$$

où C_1, C_2, C_3 sont donnés par :

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= (BC-AD)^2 + (BD+AC)^2 \\ C_2 &= A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \\ C_3 &= (A^2 + B^2)\ (C^2 + D^2)\ (BC - AD)^2 \end{aligned}\right| \qquad \text{(IV.2.40)}$$

avec les constantes A, B, C, D données par les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &A = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\Sigma_{1,a} + \Sigma_{2,a}\cos\varphi)\ ,\ B = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma_{2,a}\sin\varphi \\ &C = -\frac{1}{\sqrt{6}} (\Sigma_{1,a} + \Sigma_{2,a}\cos\varphi + 2\Sigma_{3,a}\cos\theta) \\ &D = \frac{1}{\sqrt{6}} (\Sigma_{2,a}\sin\varphi + 2\Sigma_{3,a}\sin\theta) \end{aligned}\right| \qquad \text{(IV.2.41)}$$

L'angle γ formé par le grand axe et l'axe S_u est tel que (Fig. IV.7) :

$$\cos 2\gamma = \frac{(A^2+ B^2) - (C^2+ D^2)}{(a^2- b^2)} \qquad \text{(IV.2.42)}$$

Le changement de variables défini par :

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_u \\ \\ \tilde{S}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_u - S_{u,m} \\ \\ S_v - S_{v,m} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.2.43)}$$

nous permet alors d'obtenir l'équation de l'ellipse dans le repère $\left(O' \cdot \tilde{S}_u, \tilde{S}_v\right)$ lié à ses axes (Fig. IV.7)

$$\left(\frac{\tilde{S}_u}{a}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{S}_v}{b}\right)^2 = 1 \qquad \text{(IV.2.44)}$$

Enfin, le rayon $\sqrt{2}\ k^*$ du plus petit cercle circonscrit à l'ellipse Φ' est égale au demi-grand axe de cette dernière, d'où :

$$k^* = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad \text{(IV.2.45)}$$

a étant donné par l'équation (IV.2.38). Par ailleurs, la pression hydrostatique maximale est définie par :

$$p_{max} = \frac{1}{3}\left(\Sigma_{1,m}+ \Sigma_{2,m}+ \Sigma_{3,m}\right) + \frac{1}{3} \max_{t\in T} \left(\Sigma_{1,a}\sin\omega t+\Sigma_{2,a}\sin(\omega t-\varphi)+\Sigma_{3,a}\sin(\omega t-\theta)\right)$$

(IV.2.46)

Les essais d'Issler [39] sont conformes aux équations (IV.2.34) avec $\Sigma_3(t) = 0$. Les résultats expérimentaux correspondants peuvent donc être interprétés par notre critère de fatigue en calculant k^* et p_{max} à partir des équations (IV.2.45) et IV.2.46).

En revanche, les équations (IV.2.34) ne décrivent pas les essais de Mc Diarmid [54], pour lesquels les deux contraintes principales non nulles sont encore sinusoïdales déphasées mais admettent des fréquences différentes :

$$\Sigma_1(t) = \Sigma_{1,a}\sin\omega t \ , \ \Sigma_2(t) = \Sigma_{2,a}\sin(K\omega t+\varphi) \ , \ \Sigma_3(t) = 0 \qquad \text{(IV.2.47)}$$

où K est égal à 1,2 ou 3. Dans ce cas, le trajet de chargement dans le plan Π est une courbe de Lissajoux non elliptique dès que K est différent de 1. A titre d'exemple, la figure (IV.8) montre, pour un essai de Mc Diarmid, l'évolution temporelle des contraintes principales et le trajet correspondant dans le plan Π.

Sauf dans le cas K = 1, nous avons eu recours à l'algorithme de la plus petite hypersphère circonscrite à une courbe donnée, fondé sur le théorème établi dans l'Annexe afin de déterminer la valeur de k^* , celle de p_{max} étant donnée par l'équation :

$$p_{max} = \max \ \frac{1}{3} \left(\Sigma_{1,a}\sin\omega t+\Sigma_{2,a}\sin(K\omega t+\varphi) \right) \qquad \text{(IV.2.48)}$$

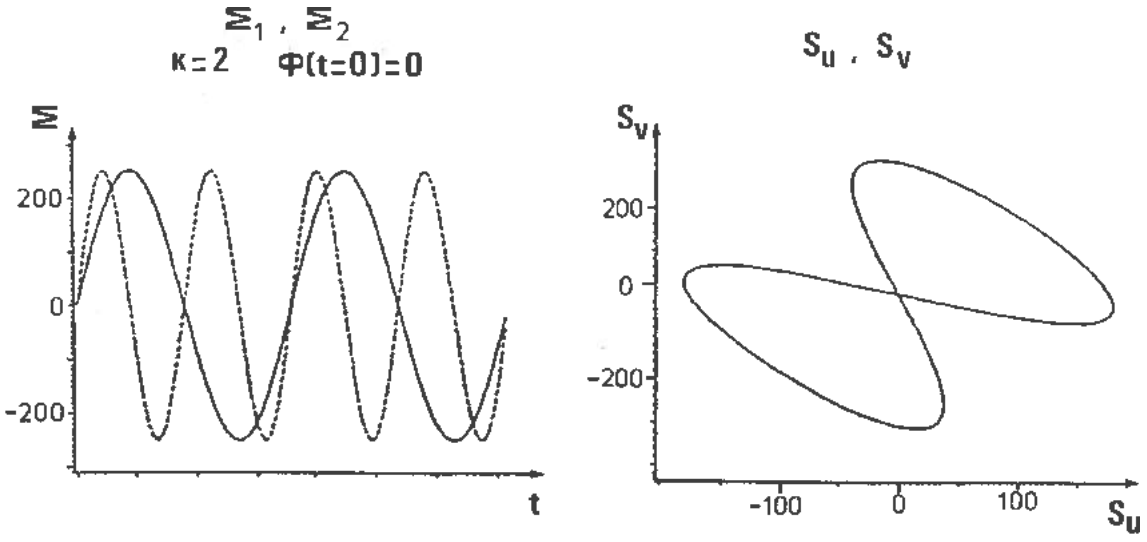


Figure IV.8 Evolution temporelle des contraintes et trajet de charge dans le plan Π pour un essai de Mc Diarmid.

Pour chacun des deux groupes d'essais présentés, les constantes α et β du critère sont déterminées à partir de deux expériences à trajet radial. L'écart entre l'expérience et la prédiction du critère est encore mesuré par l'indice I (équation IV.1.1). L'interprétation des résultats expérimentaux d'Issler et de Mc Diarmid est présentée sous la forme standard utilisée précédemment.

TABLEAU XV

ESSAIS D'ISSLER

Matériau: St35

Eprouvette: Tube mince

Référence: [39]

Constantes: $\alpha=0,2$ $\beta=122$MPa

Type d'essai: Pression interne + Traction

$\Sigma_1(t)=\Sigma_{1,a}\sin\omega t+\Sigma_{1,m}$

$\Sigma_2(t)=\Sigma_{2,a}\sin(\omega t-\varphi)+\Sigma_{2,m}$

$\Sigma_3(t)=0$

	$\Sigma_{1,a}$ (MPa)	$\Sigma_{1,a}$ (MPa)	$\Sigma_{1,m}$ (MPa)	$\Sigma_{2,m}$ (MPa)	φ	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	150	150	165	165	60°	75	197	114	-6
2	132	132	145	145	90°	93	159	125	+2
3	112	112	123	123	120°	97	119	121	-1
4	152	76	167	91	60°	80	158	111	-9
5	145	73	160	87	90°	87	137	114	-6
6	148	74	163	0	90°	89	110	111	-9
7	142	142	156	156	0°	82	199	122	-
8	122	-122	0	0	0°	122	0	122	-

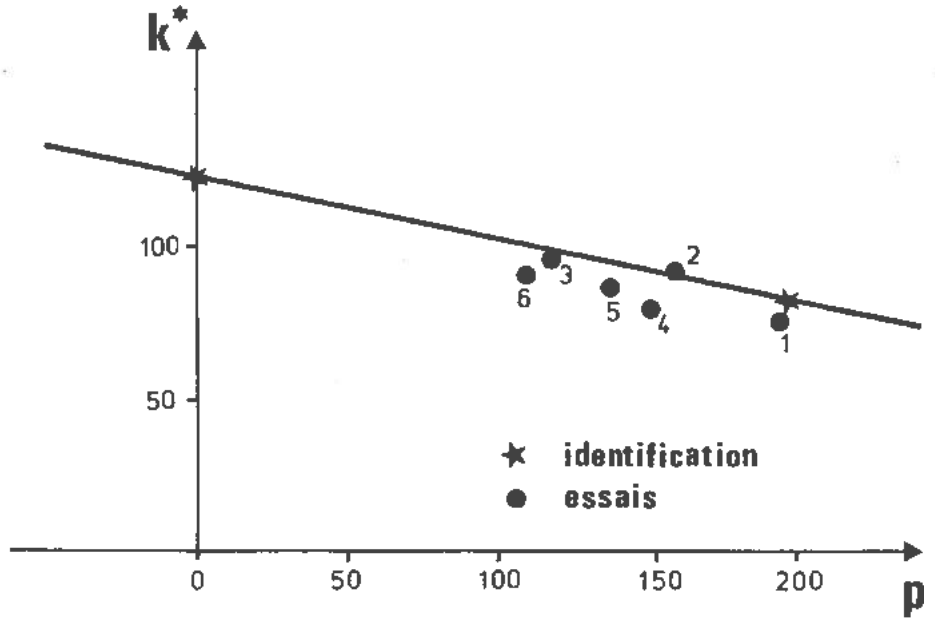
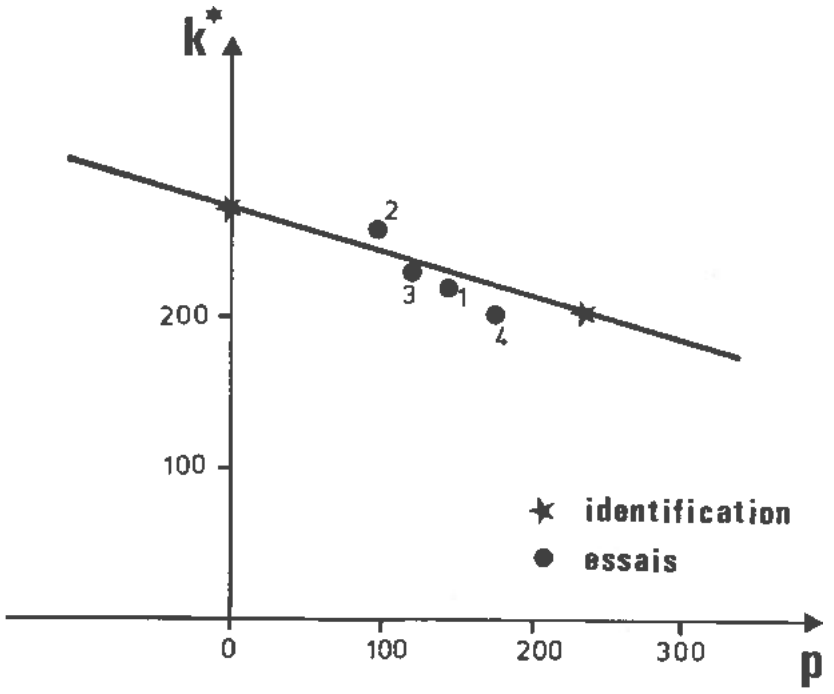


TABLEAU XVI

ESSAIS DE Mc DIARMID

Matériau: Acier En24T	Type d'essai:Pression+Traction
Eprouvette: Tube mince	$\Sigma_1(t)=\Sigma_{1,a}\sin\omega t$
Référence: [54]	$\Sigma_2(t)=\Sigma_{2,a}\sin(K\omega t+\varphi)$
Constantes: $\alpha=0,27$ $\beta=270MPa$	$\Sigma_3(t)=0$

	$\Sigma_{1,a}$ (MPa)	$\Sigma_{2,a}$ (MPa)	K	φ	k^* (MPa)	p_{max} (MPa)	$k^*+\alpha p_{max}$ (MPa)	I (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	250	250	2	0°	220	147	260	-4
2	260	260	2	90°	260	97	286	+6
3	230	230	3	0°	230	118	262	-3
4	260	260	3	180°	202	173	249	-8
5	355	355	1	0°	205	237	270	-
6	270	270	1	180°	270	0	270	-



IV.2.3 SYNTHESE DES ESSAIS DE CHARGEMENT PERIODIQUE GENERAL

Les résultats expérimentaux que nous avons analysés, sont réunis sur la figure (IV.9), où l'on a représenté les couples $\left(\frac{-\alpha\ p_{max} + \beta}{\Sigma}\ ,\ \frac{k^*}{\Sigma}\right)$ associés à chaque expérience, pour une constante de normalisation Σ égale à 410 MPa.

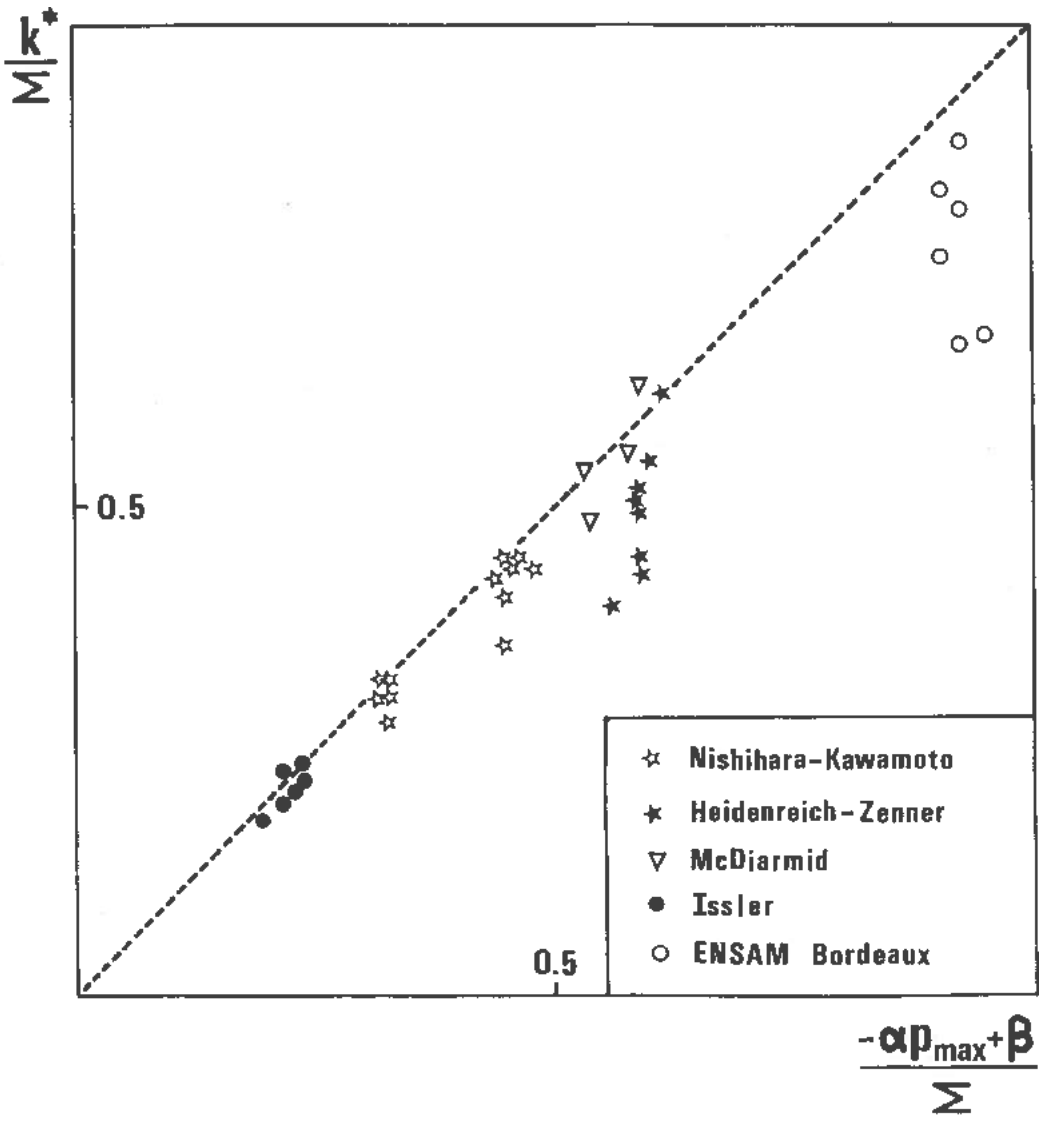


Figure IV.9 Ensemble des résultats expérimentaux pour des essais sous chargement périodique général.

Sur l'ensemble des essais, la valeur absolue de l'indice I est en moyenne égale à 10,5 %. C'est une précision satisfaisante pour des essais en fatigue. Toutefois, l'écart entre résultat expérimental et prédiction théorique peut atteindre 25 % (voir figure IV.9).

Nous pensons que cette précision provient de l'utilisation du concept de cristal "moyen". En effet, ce concept ne rend pas compte de l'activation de multiples plans de glissement lors de certaines expériences (flexion-torsion avec déphasage important, par exemple).

CONCLUSION

Au cours des chapitres I et II, nous avons étudié de manière critique, la vaste littérature concernant le problème du critère de fatigue. De cette analyse, il ressort que le critère de **Crossland** constitue le meilleur compromis entre une formulation simple (critère à deux constantes) et une bonne reproduction des observations expérimentales.

Grâce à l'approche microscopique (chapitre III), nous avons ensuite obtenu une interprétation physique du phénomène de non nucléation des fissures de fatigue, à savoir l'adaptation des cristaux plastifiés sous un chargement périodique. Conformément à la généralisation du théorème de **Melan** obtenue par **Mandel, Zarka, Halphen** [48], il est nécessaire pour cela, que la limite d'élasticité des cristaux à l'adaptation soit limitée. C'est précisément cette limitation que traduit le critère de fatigue proposé. Notre évaluation de l'état adapté du cristal correspond à la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement macroscopique dans l'espace déviatorique. La construction de cette hypersphère découle du théorème que nous avons établi dans l'annexe. Par ailleurs, en créant le concept de chargements similaires, nous avons pu généraliser, pour tout chargement cyclique multiaxial, la

notion de limite d'endurance qui était jusqu'alors restreinte aux chargements uniaxiaux. Le critère proposé coïncide avec le critère de **Crossland** dans le cas des chargements radiaux ou affines mais il en diffère, en général, dans le cas de chargements plus complexes.

Finalement, ce nouveau critère a été testé sur un grand nombre d'essais de divers modes de chargement sur plusieurs métaux (chapitre IV). Cette confrontation est encourageante, dans la mesure où le critère proposé a été élaboré au prix de certaines simplifications. En particulier la relation de passage microscopique considérée (hypothèse de **Lin-Taylor**) pourrait être améliorée. Rien, si ce n'est la complexité des calculs, n'interdit de supposer que les inclusions (i.e. les cristaux) ont des caractéristiques élastiques différentes de celles de la matrice, ou qu'elles sont élastiquement ou plastiquement anisotropes. L'interaction entre la déformation de la matrice et celle des inclusions pourrait également être modelisée par l'utilisation des modèles dits auto-cohérents [2].

Une autre possibilité offerte par l'approche microscopique est l'étude du problème d'endurance limitée dans le cadre de la fatigue à grand nombre de cycles (fatigue polycyclique). Il s'agit alors de calculer le nombre de cycles à la nucléation d'une fissure de fatigue. Ce problème fait l'objet de la seconde partie de la thèse.

REFERENCES

[1] BASTENAIRE F.A. (1972)

"New Method for the Statistical Evaluation of Constant Stress Amplitude Fatigue-Test Results",

Probabilistic Aspects of Fatigue, ASTM STP511, American Society for Testing and Materials, 1972.

[2] BERVEILLER M., ZAOUI A. (1979)

"An Extension of the Self-Consistent Scheme to Plastically-flowing Polycrystals",

Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 26.

[3] BLASS J.J., FINDLEY W.N. (1967)

"The Influence of the Intermediate Principal Stress on Fatigue under Triaxial Stresses",

Materials Research and Standards, Vol. 7, N° 6.

[4] BUI H.D. (1970)

"Evolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec l' écrouissage plastique et comportement élastoplastique d'un congrégat de cristaux cubiques."

Mémorial de l'Artillerie Francaise, Sciences et Techniques de l'Armement, 1er fascicule.

[5] BUI H.D., ZAOUI A., ZARKA J. (1972)

"Sur le comportement élastoplastique et viscoplastique des monocristaux et polycristaux métalliques de structure à faces centrées".

In Foundations of Plasticity, A. SAWCZUK Editor.

[6] BURNS D.J., PARRY J.S.C. (1964)

"Effect of Large Hydrostatic Pressures on the Torsional Fatigue Strength of two Steels",

Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 6, N° 3.

[7] CHODOROWSKI W.T. (1956)

"Fatigue Strength in Shear of an Alloy Steel with particular reference to the Effect of Mean Stress and Directional Properties",

Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London.

[8] CROSSLAND B. (1956)

"Effect of Large Hydrostatic Pressures on the Torsional Fatigue Strength of an Alloy Steel",

Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London.

[9] DANG VAN Ky (1973)

"Sur la Résistance à la Fatigue des Métaux",

Sciences et Techniques de l'Armement, Mémorial de l'Artillerie française, 3ème fascicule.

[10] DANG VAN Ky, RADENKOVIC D. (1972)

"Effet de la pression sur la nucléation et la propagation des fissures",

Revue de l'Industrie Minérale.

[11] DANG VAN Ky, et al. (1984)

"Critère d'amorçage en fatigue à grands nombres de cycles sous sollicitations multiaxiales",

Journées Internationales de Printemps, Société Française de Métallurgie, Paris.

[12] DANG VAN Ky, PAPADOPOULOS Y.V. GRIVEAU B., MESSAGE O. (1987)

"Sur le calcul des structures soumises à la fatigue multiaxiale",

Matériaux et Structures, HERMES éditeur, Paris.

[13] DANG VAN Ky, PAPADOPOULOS Y.V. (1987)

"Multiaxial Fatigue Failure Criterion : A new Approach",

Proceedings of the Third International Conference on Fatigue and Fatigue Thresolds, Fatigue'87, University of Virginia, Charlottesville, Virginia, USA.

[14] DAVIES V.C. (1935)

Discussion of "The Strength of Metals under combined Alternating Stresses" by GOUGH H.J., POLLARD H.V.

Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 131, N° 3.

[15] DEITMANN H., ISSLER L. (1974)

"Strenght Calculation under Multiaxial out-of-phase Fatigue Loading",

Proceedings of the Sixth Congress on Materials Testing, Budapest.

[16] ELLYIN F., VALAIRE B., (1985)

"Development of Fatigue Failure Theories for Multiaxial High Strain Conditions",

SM Archives 10, Martinus Nijhoff Publishers.

[17] FINDLEY W.N. (1953)

"Combined-Stress Fatigue Strength of 76S-T61 Aluminum Alloy with Superimposed Mean Stresses and Corrections for Yielding",

Technical Note 2924, National Advisory Commitee for Aeronautics.

[18] FINDLEY W.N. (1954)

"Experiments in Fatigue under Ranges of Stress in Torsion and Axial Load from Tension to Extreme Compression",

Proceedings of the American Society for Testing and Materials, Vol. 54.

[19] **FINDLEY W.N., COLEMAN J.J., HANLEY B.G. (1956)**

"Theory for Combined Bending and Torsion Fatigue with Data for SAE 4340 Steel",

Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London.

[20] **FINDLEY W.N. (1959)**

"A Theory for the Effect of Mean Stress on Fatigue of Metals under Combined Torsion and Axial Load or Bending",

Transactions-American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering for Industry, Series B, Vol. 81.

[21] **FINDLEY W.N. et al.** (1961)

"Energy Versus Stress Theories for Combined Stress. A Fatigue Expériment using a Rotating Disk",

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Basic Engineering, Series D, Vol, 83.

[22] **FINDLEY W.N., TRACY J.F.** (1973)

"The Effect of the Intermediate Principal Stress on Triaxial Fatigue of 707S-T6 Aluminum Alloy",

Journal of Testing and Evaluation, JTEVA, Vol. 1, N° 5.

[23] **FINDLEY W.N., MITCHELL W.I., STROHBECK D.D.** (1956)

"Effect of Range of Stress in Combined Bending and Torsion Fatigue Tests of 25S-T6 Aluminum Alloy",

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 78.

[24] **FINDLEY W.N.** (1957)

"Fatigue of Metals under combinations of Stresses",

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 79.

[25] FORSYTH P.J.E. (1961)

"A two Stage Fatigue Fracture Mechanism",

Proceedings Cranfield Symposium on Fatigue. Crack progation 1, 76.

[26] FROUSTEY C. (1987)

"Fatigue multiaxiale en endurance de l'acier 30 NCD 16",

Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Bordeaux.

[27] GARUD Y.S. (1981)

"Multiaxial Fatigue : A Survey of the State of the Art",

Journal of Testing and Evaluation.
JTEVA, Vol. 9, N° 3.

[28] GOUGH H.J.
POLLARD H.V. (1935)

The Strength of Metals under combined Alternating Stresses",

Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers,
Vol. 131, N° 3.

[29] GOUGH H.J.,
POLLARD H.V.,
CLENSHAW W.J. (1951)

"Some Experiments on the Resistance of Metals to Fatigue under Combined Stress",

Reports and Memoranda N° 2522, Aeronautical Research Council, His Majesty's Stationary Office, London.

[30] GROSSKREUTZ J.C.,
MUGHRABI M. (1975)

"Description of Work-Hardened Structure at Low Temperature in Cyclic Deformation",

Constitutive Equations in Plasticity, Argon A.S. Editor.

[31] GRUBISIC V.,
SIMBURGER A., (1976)

"Fatigue under Combined Out-of-Phase Multiaxiable Stresses"

Proceedings of the International Conference on Fatigue Testing and Design, Society of Environmental Engineers, London.

[32] HALPHEN B., SALENCON J. (1987)

"Elasto-plasticité",

Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

[33] HASHIN Z. (1981)

"Fatigue Failure Criteria for Combined Cyclic Stress",

International Journal of Fracture, Vol. 17, N° 2.

[34] HEIDENREICH R., ZENNER H. (1976)

"Berechnung der Dauerfestigkeit für beliebige Beanspruchungskombinationen",

IABG-Bericht, N° TF-581.

[35] HILL R. (1967)

"The Essentiel Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycristals",

Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 15.

[36] HOHENEMSER K., PRAGER W. (1933)

"The problem of fatigue strength under complex stresses",

Metallwirt-schaft, XII,24

[37] HONEYCOMBE R.W.K. (1984)

"The Plastic Deformation of Metals",

Edward Arnold (Publishers), London.

[38] HULL W.C. (1977)

"A Rational Theory of Failure for Combined Stress High-Cycle Fatigue",

Proceedings of ASME Designing Engineering Technology Conference, New York.

[39] ISSLER L. (1973)

"Festigkeitsverhalten metallischer Werkstoffe bei mehrachsiger phasenverschobener Schwingbeanspruchung"

Dissertation, Universität Stuttgart.

[40] KAKUNO H., KAWADA Y. (1979)

"A New Criterion of Fatigue Strength of a Round Bar subjected to Combined Static and Repeated Bending and Torsion",

Fatigue of Engineering Materials and Structures, Vol. 2.

[41] KITAIOKA S., CHEN J. SEIKA M. (1986)

"The Thresold of Micro Crack Propagation under Mixed Mode",

Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 29, N° 249.

[42] KLESNIL M., LUKAS P. (1980)

"Fatigue of Metallic Materials",

Materials Science Monographs, 7, Elsevier Scientific Publishing Company.

[43] LIEURADE H.P. (1982)

"La pratique des essais de fatigue",

Société Française de Métallurgie, Paris.

[44] MAGNIN T., et al. (1984)

Aspects microstructuraux de la déformation cyclique dans les métaux et alliages C.C. et C.F.C., I - Consolidation Cyclique, II - Saturation cyclique et localisation.

Revue de Physique Appliquée, 19.

[45] MANDEL J. (1971)

"Plasticité classique et viscoplasticité",

Courses and Lectures of CISM, N° 97, Springer-Verlag Publishers, Wien, New-York.

[46] MANDEL J. (1976)

"Adaptation d'une structure plastique écrouissable",

Mechanics Research Communications, Vol.3.

[47] MANDEL J. (1976)

"Adaptation d'une structure plastique écrouissable et approximations",

Mechanics Research Communications, Vol.3.

[48] **MANDEL J., ZARKA J., HALPHEN B. (1977)**

"Adaptation d 'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique",

Mechanics Research Communications, Vol. 4 (5).

[49] **MARIN J. (1956)**

"Interpretation of Fatigue Strengths for Combined Stresses",

Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London.

[50] **MATAKE T. (1977)**

"An Explanation on Fatigue Limit under Combined Stress",

Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 20, N° 141.

[51] **MATAKE T. (1980)**

"Fatigue Strength of Notched Specimen under Combined Stress",

Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 23, N° 179.

[52] **Mc DIARMID D.L. (1973)**

"A General Criterion of Fatigue Failure under Multiaxial Stress"

Proceedings of Second International Conference on Pressure Vessel Technology, American Society of Mechanical Engineers, SAN ANTONIO, TEXAS, U.S.A.

[53] **Mc DIARMID D.L. (1974)**

"A New Analysis of Fatigue under Combined Bending and Twisting",

The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 78, N° 763.

[54] **Mc DIARMID D.L. (1985)**

"Fatigue under Out-of-Phase Biaxial Stresses of Different Frequencies",

Multiaxial Fatigue, American Society for Testing and Materials, ASTM STP 853, K.W. Miller and M.W. Brown Editors., Philadelphia.

[55] Mc DIARMID D.L. (1987)

"Fatigue under Out-of-Phase Bending and Torsion",

Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Vol. 9, N° 6.

[56] MILLER W.R., HULL W.C., (1971)

"Fatigue Analysis Considering Rotating Principal Stress Axes for Aluminum Alloy 2024-T351",

Proceedings of the First International Conference on Mechanical Behavior of Materials, Federation of Material Societies.

[57] MUGHRABI M., et al. (1983)

Fatigue Crack Initiation by Cyclic Slip Irreversibilities in High-Cycle Fatigue",

Fatigue Mechanisms : Advances in Quantitative Measurement of Physical Damage, ASTM STP 811, J. Landkford, D.L. Davidson, W.L. Morris, R.P. Wei Editors., American Society for Testing and Materials, Dearborn, Michigan.

[58] NISHIHARA T., KAWAMOTO M. (1941)

"The Strength of Metals under Combined Alternating Bending and Torsion",

Memoirs of the College of Engineering, Kyoto Imperial University, Vol. 10, N° 6.

[59] NISHIHARA T., KAWAMOTO M. (1954)

"The Strength of Metals under Combined Alternating Bending and Torsion with Phase Difference",

Memoirs of the College of Engineering, Kyoto Imperial University, Vol. 11, N° 5.

[60] O'CONNOR H.C., MORRISON J.L.M., (1956)

"The effect of Mean Stress on the Push-pull fatigue Properties of an Alloy Steel",

Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London.

[61] OROWAN E. (1939)

"Theory of the Fatigue of Metals",

Proceedings of the Royal Academy, A, 171, London.

[62] PARRY J.S.C. (1956)

"Further Results of Fatigue under Triaxial Stress",

Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London.

[63] PUSKAR A., GOLOVIN S.A., (1985)

"Fatigue in Materials Cumulative Damage Processes",

Materials Science Monographs, 24, Elsevier Scientif Publishing Company.

[64] REMY L. (1984)

"Cyclic Deformation and Crack Initiation Processes",

Proceedings of Fatigue '84.

[65] ROS M. (1950)

"Die Bruchgefahr fester Koeper",

EMPA Bericht 173, Zurich.

[66] ROTVEL F. (1970)

"Biaxial Fatigue Tests with Zero Mean Stresses using Tubular Specimens", International Journal of Mechanical Science, Pergamon Press, Vol. 12.

[67] SIMBURGER A. (1975)

"Festigkeitsverhalten Zäher Werkstoffe bei einer mehrachsigen, phasenverschobenen Schwingbeanspruchung mit Körperfesten und veränderlichen Hauptspannungsrichtungen",

Bericht N° FB-121, Laboratorium für Betriebsfestigkeit, DARMSTAD.

[68] SINES G. (1959)

"Behavior of Metals under Complex Static and Alternating Stresses",

In Metal Fatigue, Sines G. and Waisman J.L. Editors, McGraw Hill.

[69] SINES G. (1961)

"The Prediction of Fatigue Fracture under Combined Stresses at Stress Concentrations"

Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 4, N° 15.

[70] SINES G., OHGI G. (1981)

"Fatigue Criteria under Combined Stresses or Strains",

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 103.

[71] STULEN F.B., CUMMINGS H.N. (1954)

"A failure Criterion for Multiaxial Fatigue Stresses",

Proceedings American Society for Testing and Materials, Vol. 54, Philadelphia.

[72] WHITE D.J., CROSSLAND B., MORRISON J.L.M. (1956)

"Effect of Hydrostatic Pressure on the Direct Stress Fatigue Strength of an Alloy Steel"

Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 1, N° 1.

[73] YOKOBORI T., YOSHIMURA T. (1966)

"A Criterion for Fatigue Fracture under Multiaxial alternating Stress State",

Report of Research, Institute for Strength and Fracture of Materials, Tohoku University, Sendai, Japan.

[74] YOKOBORI T., MORITA M., TAKAHASHI T. (1963)

"Effect of Ferrite Grain Size on the Fatigue Limit of Low Carbon Steel under Tension-compression and on the Yield Points",

Technological Reports of Tohoku University, Vol. 28, N° 1, Sendai, Japan.

[75] YOKOBORI T.,
MAEKAWA I.,
KOREKAWA S. (1963)

"Effect of Ferrite Grain Size on the Fatigue Fracture of Low Carbon Steel under Combined Alternating Bending and Torsional Stresses",

Technological Reports of Tohoku University, Vol. 28, N° 1, Sendai, Japan.

[76] YOKOBORI T. (1963)

"Unified Engineering Theory of Metal Fatigue",

Technological Reports of Tohoku University, Vol. 27, N° 2, Sendai, Japan.

ANNEXE

A-1 LA PLUS PETITE HYPERSPHERE CIRCONSCRITE A UNE COURBE DONNEE

La méthode que nous avons choisie pour évaluer l'état adapté du cristal suppose la construction de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet du chargement macroscopique dans l'espace des déviateurs (voir § III.4.1). Le chargement étant périodique, ce trajet est une courbe fermée que nous approcherons par un nombre fini de points distincts. Nous nous contenterons alors de rechercher la plus petite hypersphère circonscrite à cet ensemble de points.

Nous allons examiner ce dernier problème dans un cadre général. Soit, dans E^n, l'espace euclidien de dimension n, un ensemble S de ℓ points ($\ell \geqslant n + 1$) qui engendre l'espace E^n :

$$S = \left\{ \underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \ldots, \underline{x}^{(\ell)} \right\}, \quad \ell \geqslant n + 1 \qquad (A\text{-}1)$$

Le centre de la plus petite hypersphère circonscrite à l'ensemble S est le point $\underline{w}^*$ solution du problème de min-max suivant :

$$\min_{\underline{w}} \left\{ \max_{\underline{x}^{(i)}} \sqrt{\left(\underline{x}^{(i)} - \underline{w}\right) \cdot \left(\underline{x}^{(i)} - \underline{w}\right)} \right\} \qquad \text{(A-2)}$$

Toute hypersphère étant convexe, la plus petite hypersphère circonscrite à S contient également l'enveloppe convexe $\tilde{S}$ de S. S et $\tilde{S}$ admettent donc la même plus petite hypersphère circonscrite dont l'existence et l'unicité est alors assurée par le théorème [A.3] :

"La plus petite hypersphère circonscrite à un ensemble convexe borné existe et est unique".

Nous allons maintenant caractériser cette plus petite hypersphère circonscrite.

D'après le théorème de Karatheodory [A.1], [A.2], l'enveloppe convexe $\tilde{S}$ de S, est l'union de tous les polytopes engendrés par au plus (n+1) points de S. Le nombre λ de ces polytopes est donc égal à :

$$\lambda = C_{\ell}^{n+1} + C_{\ell}^{n} + \ldots + C_{\ell}^{2} \qquad \text{(A-3)}$$

Chaque combinaison de (n+1) points de S engendre au plus l'espace E^n , et, plus généralement, chaque combinaison de (i+1) points de S engendre au plus un sous espace E^i de dimension i ($1 \leqslant i \leqslant n - 1$).

Soit P^n une combinaison de (n+1) points de S engendrant l'espace E^n , (dim P^n = n). Les (n+1) points $\left(\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \ldots, \underline{x}^{(n+1)}\right)$ de P^n sont les sommets d'un polytope de E^n et il existe une seule hypersphère passant par tous

les sommets. Son centre est l'intersection des $\frac{n(n+1)}{2}$ hyperplans qui coupent orthogonalement une arête $\left(\underline{x}^{(i)},\underline{x}^{(j)}\right)$ en son milieu $\frac{\underline{x}^{(i)} - \underline{x}^{(j)}}{2}$. En pratique, pour obtenir le centre de l'hypersphère qui passe par tous les sommets de P^n, il suffit de considérer l'intersection des n hyperplans relatifs aux n arêtes concourantes en un sommet particulier de P^n [A.4]. L'hypersphère qui passe par tous les sommets de P^n sera appelée hypersphère circonscrite à p^n. Elle ne doit pas être confondue avec la plus petite hypersphère circonscrite à P^n qui peut contenir P^n sans passer par tous ses sommets.

Examinons maintenant une combinaison P^{n-1} de n points de S engendrant un sous-espace E^{n-1} (hyperplan de E^n). Il existe une infinité d'hypersphères de E^n passant par tous les sommets de P^{n-1} mais la plus petite d'entre elles est celle dont le centre appartient au sous espace E^{n-1}. Cette dernière hypersphère, que nous appellerons dorénavant hypersphère circonscrite au polytope P^{n-1}, existe et est unique car elle admet même centre et même rayon que l'hypersphère de E^{n-1} circonscrite à P^{n-1}. Encore une fois cette hypersphère de E^n ne coïncide généralement pas avec la plus petite hypersphère de E^n circonscrite à P^{n-1}, cette dernière pouvant contenir P^{n-1} sans passer par tous ses sommets. Le centre de l'hypersphère de E^n circonscrite à P^{n-1} est aussi celui de l'hypersphère de E^{n-1} circonscrite à P^{n-1}. Du raisonnement déjà effectué pour un polytope P^n de E^n, nous déduisons qu'il suffit maintenant de considérer l'intersection des (n-1) hyperplans médiateurs associés aux (n-1) arêtes concourantes en un sommet parti-

culier de P^{n-1} . Nous obtenons ainsi une droite $\mathcal{L}$ de E^n orthogonale à l'hyperplan E^{n-1} engendré par P^{n-1}. Le centre de l'hypersphère de E^n circonscrite à P^{n-1}, au sens précédemment défini, est alors le point d'intersection de cette droite $\mathcal{L}$ avec l'hyperplan E^{n-1}.

Nous pouvons, de la même façon, définir l'hypersphère de E^n circonscrite à un polytope P^i de dimension i engendré par (i+1) points de l'ensemble S, pour i variant de n-2 à 1. Nous pouvons alors formuler le théorème suivant :

THEOREME :

> **La plus petite hypersphère circonscrite à un ensemble S de ℓ points de l'espace euclidien à n dimensions ($\ell \geqslant n + 1$) est l'une des hypersphères circonscrites aux polytopes P^i engendrés par des combinaisons de (i+1) points de S, i variant de 1 à n.**

La démonstration du théorème que nous venons d'établir est simple. Tout d'abord, il est évident que l'ensemble S et sa plus petite hypersphère circonscrite ont au moins deux points communs.

Supposons qu'il y en ait exactement deux notés A et B. La plus petite hypersphère circonscrite à S est alors centrée au milieu de AB et son diamètre est égal à la longueur du segment AB. Il s'agit donc de l'hypersphère circonscrite au polytope de dimension 1 engendré par la combinaison de deux points particuliers de S, à savoir A et B.

Supposons maintenant que la plus petite hypersphère circonscrite à S ne passe que par trois points A, B et Γ de S. A, B et Γ appartiennent à une même hypersphère donc ne sont pas alignés. La plus petite hypersphère circonscrite à S coïncide donc avec l'hypersphère circonscrite au polytope de dimension 2 engendré par la combinaison de trois points particuliers de S. Remarquons qu'une combinaison de trois points quelconques de S n'engendre pas forcément un polytope de dimension 2 (triangle), car les trois points peuvent être alignés.

Supposons que l'ensemble S et sa plus petite hypersphère circonscrite aient quatre points A, B, Γ, Δ en commun. S'ils sont coplanaires, il suffit d'en choisir trois et de se ramener au raisonnement précédent. S'ils ne sont pas coplanaires, la plus petite hypersphère circonscrite à S est aussi l'hypersphère circonscrite au tétraèdre A B Γ Δ, qui est un polytope engendré par une combinaison de quatre points particuliers de S. Remarquons à nouveau qu'une combinaison de quatre points n'engendre pas forcément un polytope de dimension 3 (tétraèdre) car les points peuvent être coplanaires.

Des raisonnements analogues peuvent être suivis dans le cas où l'ensemble S et sa plus petite hypersphère circonscrite ont jusqu'à n points communs. Lorsque la plus petite hypersphère circonscrite à S passe par (n+1) points de S et que ces (n+1) points engendrent l'espace euclidien à n dimensions, elle coïncide avec l'hypersphère circonscrite au polytope de dimension n, engendré par la combinaison de (n+1) points particuliers de S. Si les (n+1)

points de contact n'engendrent qu'un sous-espace de dimension i strictement inférieure à n, il suffit d'en choisir (i+1) et de se ramener au cas où la plus petite hypersphère circonscrite passe par (i+1) points de S.

Finalement, si l'ensemble S et sa plus petite hypersphère circonscrite ont plus de n+1 points communs, il suffit d'en choisir (n+1) et de se ramener au cas précédent.

Nous venons donc de montrer que, quel que soit le nombre de points de contact entre l'ensemble S et sa plus petite hypersphère circonscrite, cette dernière coïncide toujours avec l'hypersphère circonscrite à l'un des polytopes engendrés par les combinaisons de (i+1) points de S, i variant de 1 à n. Le théorème est donc démontré.

REFERENCES

[A.1] LAY S.R. (1982)

"Convex sets and their applications" Jonh Wiley and Sons, Publishers.

[A.2] Mc MULLEN P., SHEPHARD G.C. (1971)

"Convex polytopes and the upper bound conjecture", Cambridge University Press.

[A.3] EGGLESTON H.G. (1958)

"Convexity", Cambridge University Press.

[A.4] STEFANIDIS N.K. (1979)

"Géométrie Analytique", Presses de L'Université Aristote de Thessalonique.

DEUXIEME PARTIE

ENDURANCE LIMITEE : CALCUL DU NOMBRE DE CYCLES A LA NUCLEATION D'UNE FISSURE DE FATIGUE

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I-1 POSITION DU PROBLEME

Pour définir le but de cette seconde partie de la thèse, nous rappelons brièvement la description qualitative du phénomène de fatigue déjà présentée dans le paragraphe III.1.1 de la première partie. Trois phases successives peuvent être distinguées lors d'un essai en fatigue :

- La phase de nucléation, ou stade 0, durant laquelle quelques cristaux, défavorablement orientés par rapport au chargement, se plastifient d'une façon intense. Cette première phase s'achève avec la rupture de ces cristaux et nous admettrons que cette rupture est due à la cumulation des microdéformations plastiques.

- La phase de formation d'une fissure dominante (Stade I) par coalescence des microfissures apparues à la fin de la phase précédente lors de la rupture des cristaux plastifiés.

- La phase de propagation de la fissure dominante (stade II) qui conduit finalement à la rupture de l'éprouvette.

Le degré d'endommagement d'une éprouvette est souvent mesuré par l'intermédiaire du volume des microcavités ou de

la surface des microfissures qui existent dans la matière à l'instant considéré. Cette conception de l'endommagement due à **L.M. Katchanov** ("Time of the rupture process under creep conditions", TVZ Akad. Nauk. S.S.R. Old Tech. Nauk., Vol. 8, 1958), a été extensivement développée par **J. Lemaitre** et **J.L. Chaboche** [1], [11], [12]. La variable d'endommagement est alors définie à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire sur un volume élémentaire fini, de taille suffisamment grande par rapport aux hétérogénéités du milieu. Sur chaque section de ce volume, d'aire S et de normale $\underline{n}$, les traces des fissures et des cavités couvrent une surface totale d'aire S_D (Fig. I.1).

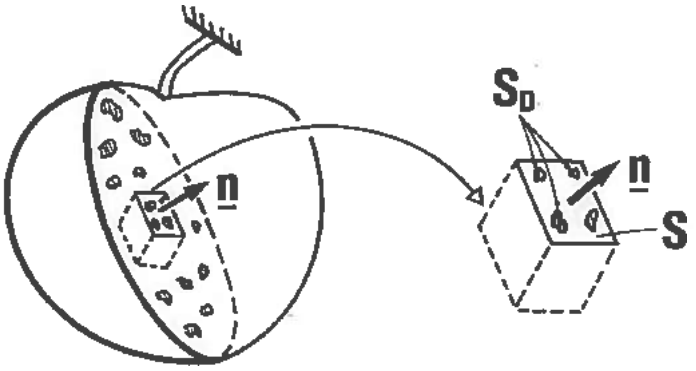


Figure I.1 Volume élémentaire endommagé, d'après Lemaitre-Chaboche [12].

La mesure mécanique de l'endommagement (i.e. la variable d'endommagement), relative à la direction $\underline{n}$ est alors définie par :

$$D(\underline{n}) = \frac{S_D}{S} \qquad \text{(I.1.1)}$$

L'endommagement est dit isotrope lorsqu'il ne dépend pas de la normale $\underline{n}$ considérée (i.e. $D(\underline{n}) = D$, $\forall \underline{n}$). Il correspond à une distribution spatiale uniforme de microcavités et de microfissures ($D = 0$ si l'élément est vierge, $D = 1$ s'il est rompu). Ce cas a été étudié pour divers comportements de matériaux (élasticité, plasticité, viscoplasticité, fatigue), par Lemaitre-Chaboche [12].

Dans le cadre de la fatigue, cette conception du dommage convient bien pour la description de la phase de formation d'une fissure dominante (stade I) par coalescence des microfissures. Elle pourrait donc permettre de calculer le nombre de cycles N_c que dure cette phase (voir § III.1.1, première partie).

De manière analogue, durant la phase de propagation de la fissure dominante (stade II), le dommage D peut être mesuré par la longueur ℓ de la fissure rapportée à la taille L de l'éprouvette dans la direction de propagation (Fig. I.2), c'est-à-dire que

$$D = \frac{\ell}{L} \qquad \text{(I.1.2)}$$

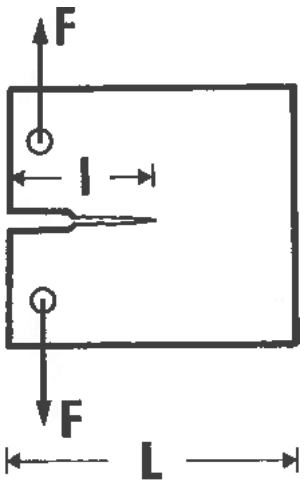


Figure I.2 Eprouvette endommagée par la propagation d'une fissure.

Une telle définition du dommage [9], [4] est contestable, surtout si la direction de propagation de la fissure change au cours du temps. Toutefois, pour des chargements très simples, elle permet de calculer le nombre de cycles N_p que dure la troisième phase du phénomène de fatigue.

Il est clair qu'aucune de ces deux définitions du dommage ne peut être utilisée pour étudier la phase de nucléation des microfissures de fatigue (stade 0), puisque la matière ne présente alors aucune discontinuité. Autrement dit, ces définitions ne permettent pas de calculer le nombre de cycle correspondant.

Dans cette deuxième partie, nous présentons un modèle qui permettra justement d'évaluer le nombre de cycles N_n que dure la première phase du phénomène de fatigue. Nous supposerons que la rupture des cristaux plastifiés, i.e.

l'apparition de microfissures, est due à l'accumulation de la microdéformation plastique dans ces cristaux "privilégiés" durant le chargement cyclique appliqué.

En plus de l'approche de Lemaitre-Chaboche et des modèles d'endommagement relatifs à la propagation d'une fissure, de nombreux modèles empiriques ont été proposés pour le cumul du dommage dans le cas de chargements cycliques uniaxiaux [3], [7], [8], [13], [18]. Citons, pour des raisons historiques, le modèle de Miner [14], où la variable d'endommagement D est définie comme le rapport du nombre N de cycles écoulés sur le nombre N_F de cycles à la rupture de l'éprouvette :

$$D(N) = \frac{N}{N_F} \qquad \text{(I.1.3)}$$

Ainsi défini, le dommage vaut 0 au début du chargement et 1 au moment de la rupture. Lors d'une sollicitation composée par des chargements uniaxiaux de même nature mais d'amplitudes et états moyens différents, le cumul du dommage, selon Miner, suit une loi linéaire :

$$D(N) = \sum_i D_i = \sum_i \frac{N_i}{N_{F(i)}} \qquad \text{(I.1.4)}$$

A l'image du modèle de Miner, tous les modèles empiriques uniaxiaux sont relatifs à la rupture d'une éprouvette sous chargement cyclique [5].

L'objet de cette seconde partie de la thèse (i.e. le calcul du nombre de cycles à la nucléation de microfissures de fatigue) s'inscrit donc dans un cadre étranger au modèle de Lemaitre-Chaboche (formation d'une fissure dominante) et aux modèles empiriques ou de propagation d'une fissure (rupture de l'éprouvette). Nous avons donc renoncé à présenter une étude bibliographique. En revanche, puisque nous attribuons la rupture d'un cristal plastifié à la cumulation de la microdéformation plastique, nous devons approfondir l'étude du comportement élastoplastique du cristal sous chargement cyclique (voir § III.1.2, première partie).

I-2 COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DU CRISTAL

Dans la première partie de la thèse (§ III.1.2), nous avons décrit qualitativement le comportement élastoplastique d'un monocristal soumis à un chargement cyclique uniaxial en déformation imposée. Les expériences étudiées montrent clairement l'existence de deux phases distinctes de comportement. Tout d'abord, la limite d'élasticité du cristal augmente avec le nombre de cycles de charge appliqués (phase du durcissement), puis elle demeure constante (phase de saturation). L'objet de ce paragraphe est maintenant de compléter cette description (valeur de la limite d'élasticité de saturation, définition de la rupture).

Pour cela, nous allons nous appuyer sur les travaux de Winter [19]. Cet auteur a effectué un nombre important d'essais sur des monocristaux de cuivre. Les éprouvettes étaient soumises à une déformation plastique longitudinale alternée (i.e. symétrique par rapport à zéro). Elles étaient orientées de manière à ce qu'un seul système de glissement du cristal fût actif. Ces expériences ont été réalisées à l'air et à la température ambiante. Winter a bien constaté une première phase de durcissement du cristal, suivie d'une phase de saturation.

Sur la figure I.3, les boucles d'hystérésis du cristal pour divers nombres de cycles ont été tracées. L'évolution de ces boucles montre l'existence de la phase de durcissement.

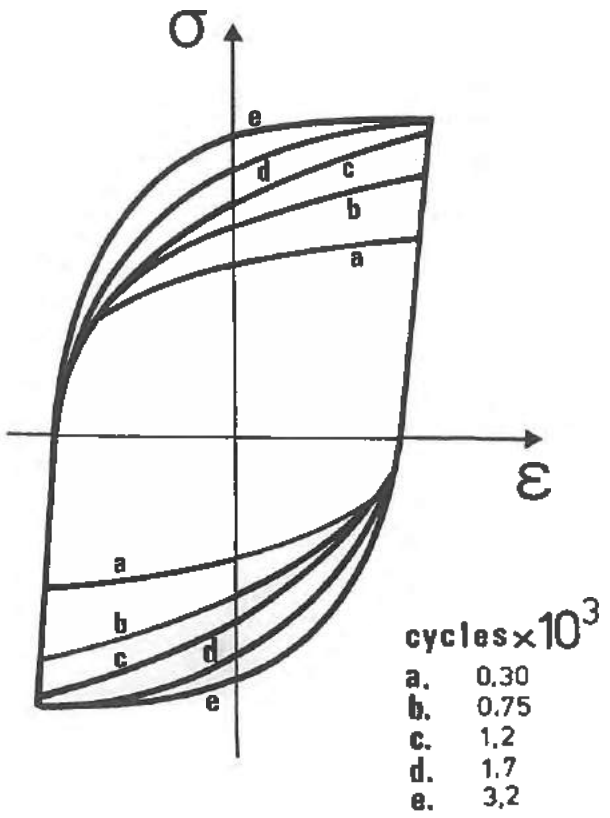


Figure I.3 Boucles d'hystérésis du cristal pour divers nombres de cycles effectués [19].

Mais sa conclusion la plus remarquable est que la valeur de la cission réduite maximale τ_s associée au seul système de glissement actif, est indépendante de l'amplitude de la déformation plastique imposée, dès que la phase de saturation est atteinte. Cette propriété est illustrée par la figure I.4 où toutes les courbes admettent un même palier horizontal final.

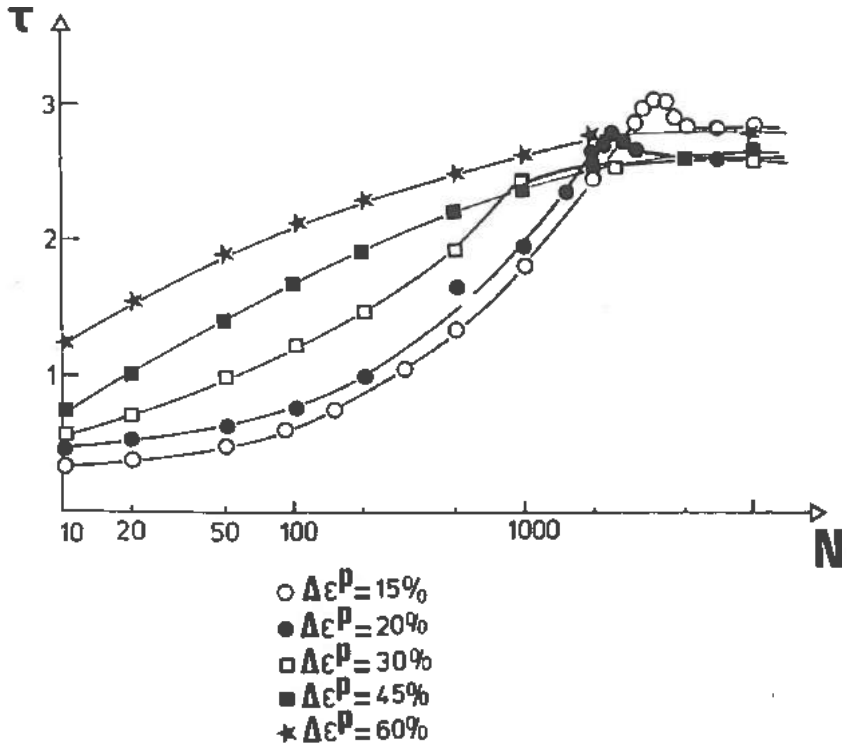


Figure I.4 Evolution de la cission réduite maximale en fonction du nombre de cycles effectués, pour diverses amplitudes de déformation plastique imposée (d'après [19]).

Lors d'un essai en fatigue effectué sur un monocristal, nous savons que les déformations plastiques se concentrent dans de fines bandes appelées bandes de glissement persistantes (voir § III.1.1, première partie). Nous savons également que ces bandes sont les sites privilégiés où apparaissent les microfissures de fatigue [6], [10], [15]. Par ailleurs, Winter [19] a remarqué que la cission réduite maximale τ_s de la phase de saturation correspondait aussi au seuil de non-formation des bandes de glissement

persistantes. En admettant alors que ces dernières sont toujours sujettes aux microfissures de fatigue, nous pouvons identifier seuil de non formation des bandes de glissements persistantes et seuil de non nucléation des fissures de fatigue. Rappelons que, dans notre conception du phénomène de la fatigue, le seuil de non nucléation est confondu avec la limite d'endurance (voir § III.1.1, première partie). Nous sommes donc amenés à conclure que la cission réduite maximale τ_s de la phase de saturation correspond à la limite d'endurance du matériau pour l'essai considéré. Remarquons que cette correspondance est cohérente dans la mesure où, d'une part, la limite d'endurance est indépendante de l'amplitude du chargement et, d'autre part, la cission réduite maximale de la phase de saturation est indépendante de l'amplitude de la déformation plastique imposée. Winter était arrivé à cette même conclusion en calculant, pour ses essais, la contrainte normale longitudinale σ_s de la phase de saturation en fonction de la cission réduite maximale τ_s correspondante et de la matrice d'orientation a_{ij} du seul système de glissement actif. Il a bien constaté que σ_s était égal à la limite d'endurance du matériau obtenue lors d'essais classiques en traction-compression alternée à contrainte imposée.

Pour généraliser cette observation expérimentale de Winter, nous allons admettre que <u>la limite d'élasticité du cristal k_s dans la phase de saturation d'un chargement donné, est égale à la limite d'endurance généralisée k_{lim} associée au même chargement :</u>

$$k_s = k_{lim} \qquad \text{(I.2.1)}$$

La limite d'endurance généralisée k_{lim} a été définie dans le paragraphe III.4.3 de la première partie (équation III.4.95). Rappelons qu'elle est identique pour deux chargements similaires. Ainsi, pour un chargement cyclique donné, nous connaissons à priori la valeur k_s de la limite d'élasticité du cristal qui marque la transition de la phase de durcissement à la phase de saturation. Si, par ailleurs, nous connaissons la loi d'évolution de l'écrouissage du cristal, nous sommes alors en mesure d'évaluer le nombre de cycles que dure la phase de durcissement.

Pour les besoins de notre étude, nous allons compléter le comportement élastoplastique cyclique du cristal que nous venons d'élaborer à partir d'observations expérimentales. Après les phases de durcissement et de saturation déjà décrites, nous supposerons dorénavant que le cristal entre dans une phase d'adoucissement cyclique. Les trois phases successives (durcissement-saturation-adoucissement) apparaissent clairement sur la figure I.5 où nous avons représenté l'évolution schématique de la limite d'élasticité du cristal en fonction du nombre de cycles effectués, pour deux chargements cycliques similaires. Evidemment, pour un chargement d'une autre classe de similarité, la limite d'élasticité du cristal de la phase de saturation k_s sera différente.

Dans le paragraphe I.1, nous avons vu que c'est la rupture des cristaux plastifiés qui provoque l'apparition des microfissures de fatigue. Il est donc nécessaire d'adopter une définition claire de cette rupture, bien que ce soit encore un problème ouvert. Dans le cadre de notre

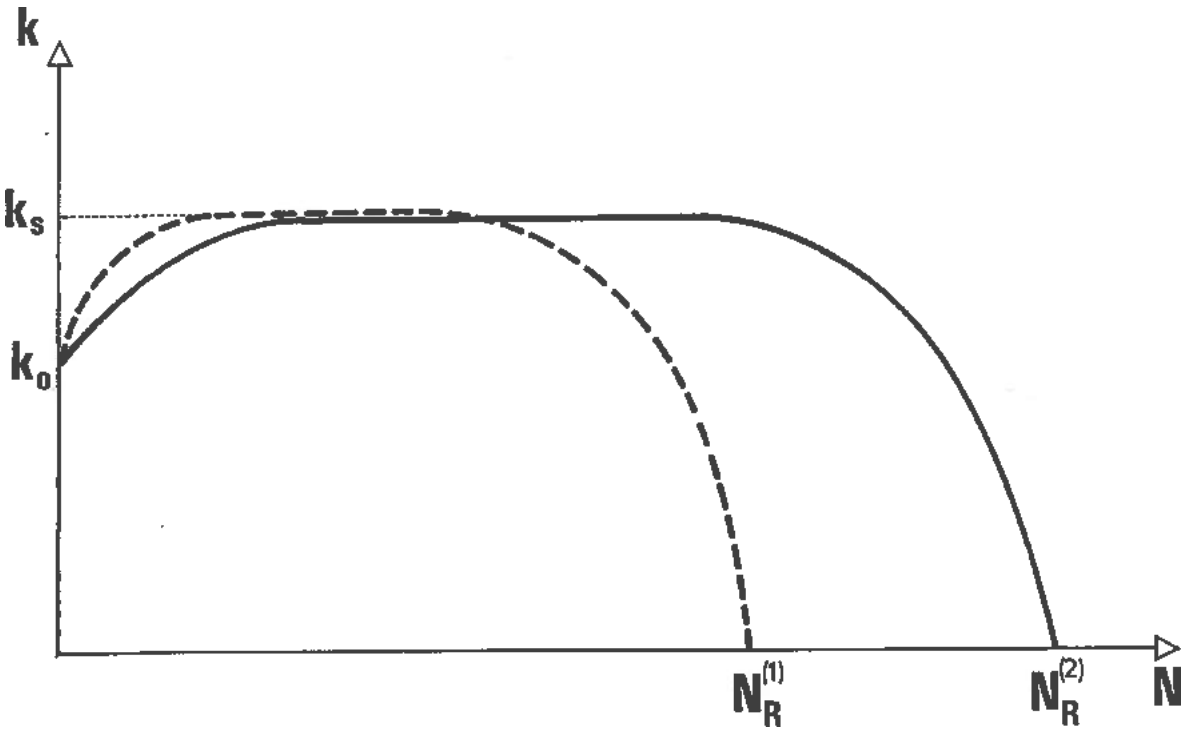


Figure I.5 Les trois phases d'évolution de la limite d'élasticité du cristal, pour deux chargements similaires (schématique).

étude, nous choisissons la définition suivante : Un cristal sollicité sous chargement cyclique se rompt à l'instant où sa limite d'élasticité k, fonction du nombre de cycles, s'annule. Si N_R désigne le nombre de cycles effectués au moment de la rupture du cristal, nous pouvons écrire l'équivalence formelle :

$$\textbf{Rupture du cristal} \iff k(N_R) = 0 \qquad \text{(I.2.2)}$$

Bien sûr, ce comportement cyclique à trois phases que nous venons de décrire, est loin d'être universel. Des comportements radicalement différents ont déjà été observés pour différents matériaux. Par exemple, la figure I.6, d'après [17], illustre le comportement des monocristaux Al-Cu.

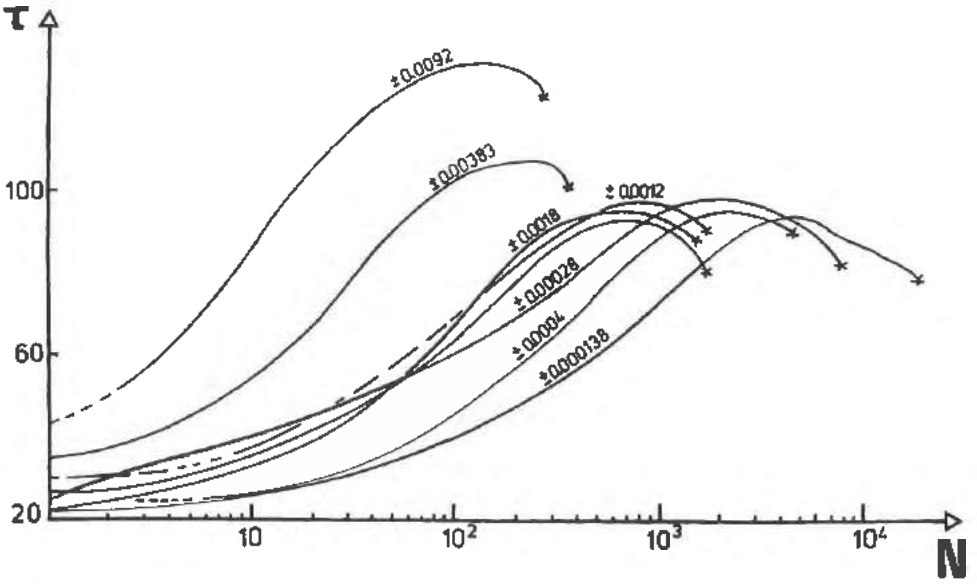


Figure I.6 Evolution de la cission réduite maximale en fonction du nombre de cycles pour différentes amplitudes de déformation plastique (d'après [17]).

Nous remarquons que la phase de saturation est inexistante et que le comportement semble être composé de deux phases seulement (durcissement-adoucissement). Mais il est encore plus intéressant de noter que la valeur τ_{tr} de la cission réduite maximale qui marque la transition entre les phases de durcissement et d'adoucissement est sensiblement constante pour une large gamme d'amplitudes de la déformation

plastique imposée. Nous admettons que cette valeur τ_{tr} correspond aussi au seuil de non formation des bandes de glissement persistantes. Ainsi nous allons envisager le cas où l'évolution de la limite d'élasticité du cristal en fonction du nombre de cycles effectués, se compose d'une phase de durcissement et d'une phase d'adoucissement (voir Fig. I.7).

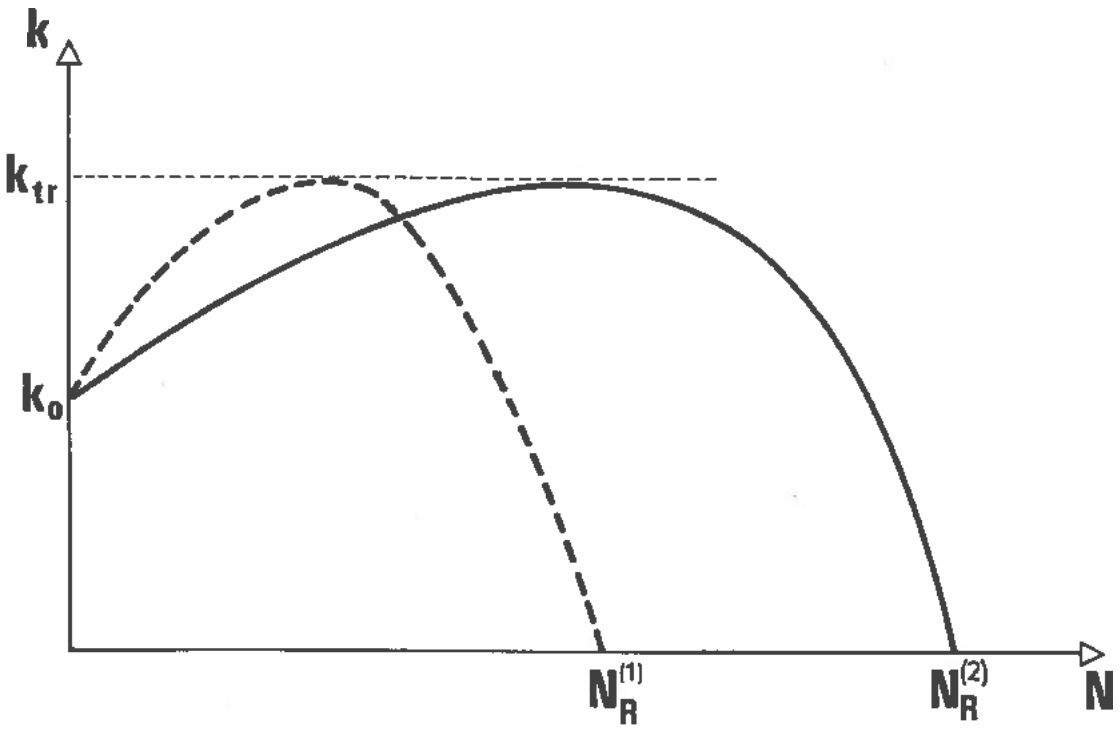


Figure I.7 Evolution de la limite d'élasticité d'un cristal pour deux chargements similaires, dans le cas d'un comportement cyclique à deux phases (schématique).

La valeur k_{tr} de la limite d'élasticité qui marque la transition sera naturellement prise égale à la limite d'endurance généralisée correspondante k_{lim} :

$$k_{tr} = k_{lim} \qquad \text{(I.2.3)}$$

Elle sera donc la même pour des chargements similaires (Fig. I.7).

Par ailleurs, la définition de la rupture du cristal (équation I.2.2) est toujours valable.

Bien qu'il existe d'autres types de comportement élastoplastique cyclique envisageables pour un cristal [16], nous nous limiterons, dans le cadre de cette thèse, à l'étude des deux présentés. Le comportement à trois phases (durcissement-saturation-adoucissement) étant plus complexe que celui à deux phases (durcissement-adoucissement) c'est par ce dernier que nous choisissons de commencer. Rappelons que nous cherchons à évaluer le nombre de cycles N_n à la nucléation d'une microfissure de fatigue, c'est-à-dire à la rupture du cristal ($N_n = N_R$ et $k(N_R) = 0$).

CHAPITRE II

CRISTAL A DEUX PHASES DE COMPORTEMENT CYCLIQUE

II-1 MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DU CRISTAL

Comme dans la première partie de la thèse (§ III.4.1) nous supposerons que le polycristal de volume $V(\underline{x})$ est constitué de cristaux "moyens" obéissant à un critère de plasticité de von Mises.

Nous donnerons tout d'abord les lois d'évolution relatives aux deux phases de comportement (durcissement-adoucissement), puis nous les intégrerons dans le cas du chargement cyclique proportionnel pour lequel il est relativement facile d'obtenir analytiquement la solution exacte (voir § III.4.2, de la première partie).

II.1.1 LES EQUATIONS DE BASE

Nous utiliserons désormais les mêmes notations que dans la première partie (§ III.4.2). Pour le cristal, le critère de plasticité de von Mises s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) : (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) - k^2 \leqslant 0 \qquad \text{(II.1.1)}$$

En cas de charge plastique (voir équation III.4.32, première partie), les vitesses de déformations plastiques suivent la règle de normalité :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{soit} \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda}(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) \qquad \text{(II.1.2)}$$

L'écrouissage cinématique du cristal est donné par :

$$\underline{\underline{a}} = c\underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{\underline{a}}} = c\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \quad , \quad c>0 \qquad \text{(II.1.3)}$$

La loi d'écrouissage isotrope dépend de la phase de comportement considérée. Durant la phase de durcissement, la limite d'élasticité du cristal croît linéairement selon la loi,

$$\dot{k} = g\sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p} \quad , \quad g > 0 \qquad \text{(II.1.4)}$$

alors que, durant la phase d'adoucissement, elle décroît selon une loi similaire :

$$\dot{k} = -h\sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p} \quad , \quad -h > 0 \qquad \text{(II.1.5)}$$

La transition entre les deux phases de comportement s'effectue pour une valeur précise k_{tr} de la limite d'élasticité, ou, ce qui est équivalent, pour une valeur précise $\in^p_{tr}$ de la microdéformation plastique cumulée. En notant t_{tr} l'instant où a lieu cette transition, l'intégration des équations (II.1.4) et (II.1.5) pour $0 \leqslant t \leqslant t_{tr}$ et $t \geqslant t_{tr}$ respectivement, nous donne la valeur k(t) de la limite d'élasticité du cristal à tout instant :

$$\text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_{tr} \quad , \quad k(t) = k_o + g\int_0^t \sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p}\, d\tau \qquad \text{(II.1.6)}$$

et

$$\text{si} \quad t_{tr} \leqslant t \quad , \quad k(t) = k_{tr} - h\int_{t_{tr}}^t \sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p}\, d\tau \qquad \text{(II.1.7)}$$

où k_o désigne la limite d'élasticité initiale du cristal.

Par ailleurs, le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$, peut être calculé en écrivant la condition $\dot{f} = 0$. Dans la phase de durcissement nous obtenons,

$$\dot{\lambda} = \frac{(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) : \dot{\underline{\underline{s}}}}{2(c+\sqrt{2}\, g)k^2} \qquad \text{(II.1.8)}$$

alors que dans la phase d'adoucissement, il vient :

$$\dot{\lambda} = \frac{(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) : \dot{\underline{\underline{s}}}}{2(c-\sqrt{2}\, h)k^2} \qquad \text{(II.1.9)}$$

Les relations de passage à l'échelle macroscopique

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\rho}} \quad \text{soit} \quad \dot{\underline{\underline{s}}} = \dot{\underline{\underline{S}}} + \dot{\underline{\underline{\rho}}} \qquad \text{(II.1.10)}$$

ainsi que l'égalité

$$\underline{\underline{\rho}} = -2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad \text{soit} \quad \dot{\underline{\underline{\rho}}} = -2\mu\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \qquad \text{(II.1.11)}$$

établies dans la première partie (§ III.2.2) sont valables à tout instant dans les deux phases de comportement. En tenant compte de ces deux équations, de la règle de normalité (équation II.1.2) et du fait que la frontière du critère est atteinte en charge plastique, la relation (II.1.8) nous permet de calculer les vitesses de déformations plastiques dans la phase de durcissement :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{\left[(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) : \dot{\underline{\underline{S}}} \right] (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}})}{2Ak^2} \qquad \text{(II.1.12)}$$

où

$$A = c+2\mu+\sqrt{2}g \qquad \text{(II.1.13)}$$

De manière analogue, dans la phase d'adoucissement, la relation (II.1.9) conduit à :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{\left[(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) : \dot{\underline{\underline{S}}} \right] (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}})}{2Bk^2} \qquad \text{(II.1.14)}$$

où

$$B = c+2\mu-\sqrt{2}h \qquad \text{(II.1.15)}$$

Nous avons montré (§ III.4.2, première partie) que, lors d'un chargement proportionnel, les tenseurs $\underline{\underline{S}}$ et $(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}})$ sont proportionnels, si bien qu'en charge plastique, nous avons :

$$\left[(\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}}):\dot{\underline{\underline{S}}}\right](\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}}) = \left[(\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}}):(\underline{\underline{s}}-\underline{\underline{a}})\right]\dot{\underline{\underline{S}}} = 2k^2\dot{\underline{\underline{S}}} \qquad \text{(II.1.16)}$$

Les vitesses de déformations plastiques dans la phase de durcissement sont alors tout simplement :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{\dot{\underline{\underline{S}}}}{A} \quad \text{soit} \quad d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{d\underline{\underline{S}}}{A} \qquad \text{(II.1.17)}$$

et, dans la phase d'adoucissement,

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{\dot{\underline{\underline{S}}}}{B} \quad \text{soit} \quad d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{d\underline{\underline{S}}}{B} \qquad \text{(II.1.18)}$$

Ces deux dernières relations vont nous permettre, dans le cas d'un chargement cyclique proportionnel, de calculer à tout instant, la déformation plastique cumulée $\in^p$ définie par

$$\in^p = \int d\in^p = \int \sqrt{d\underline{\underline{\varepsilon}}^p : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p} \qquad \text{(II.1.19)}$$

ainsi que la limite d'élasticité du cristal donnée par les relations (II.1.6) et (II.1.7). Ces deux quantités pourront être exprimées en fonction du nombre N de cycles effectués, du module $\|\Delta\underline{\underline{S}}\| = \sqrt{\Delta\underline{\underline{S}} : \Delta\underline{\underline{S}}}$ du tenseur variation des contraintes déviatoriques macroscopiques et du module $\|\underline{\underline{S}}_m\|$ du déviateur moyen.

II.1.2 CAS D'UN CHARGEMENT CYCLIQUE PROPORTIONNEL

Tout d'abord, nous rappelons brièvement les notations que nous avions introduites dans la première partie

(§ III.4.2) pour ce type de chargement. Dans l'espace des contraintes déviatoriques macroscopiques, le trajet d'un chargement proportionnel, est représenté par un segment AB d'une droite passant par l'origine (Fig. II.1). Les états extrêmes $\underline{\underline{S}}_A$ et $\underline{\underline{S}}_B$ sont choisis de manière à ce que :

$$\|\underline{\underline{S}}_B\| < \|\underline{\underline{S}}_A\| \qquad \text{(II.1.20)}$$

Le chargement est alors composé d'une première mise en charge (trajet O → A, Fig. II.1) puis de cycles successifs identiques (trajets A → B → A, Fig. II.1).

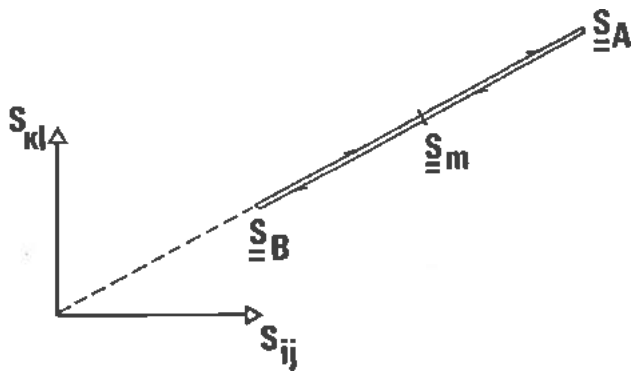


Figure II.1 Représentation du trajet d'un chargement cyclique proportionnel dans l'espace des déviateurs macroscopiques.

Nous définissons le tenseur directeur du chargement $\underline{\underline{e}}$:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{\underline{\underline{S}}_A}{\|\underline{\underline{S}}_A\|} \qquad \text{(II.1.21)}$$

si bien que le tenseur variation des contraintes déviatoriques $\Delta\underline{\underline{S}}$ et le déviateur moyen $\underline{\underline{S}}_m$ sont donnés par :

$$\Delta\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_A - \underline{\underline{S}}_B = \|\Delta\underline{\underline{S}}\| \; \underline{\underline{e}} \qquad \text{(II.1.22)}$$

et

$$\underline{\underline{S}}_m = \frac{1}{2}(\underline{\underline{S}}_A + \underline{\underline{S}}_B) = \|\underline{\underline{S}}_m\| \; \underline{\underline{e}} \qquad \text{(II.1.23)}$$

Chaque triplet $(\|\Delta\underline{\underline{S}}\|, \|\underline{\underline{S}}_m\|, \underline{\underline{e}})$ définit un trajet de chargement et un seul dans l'espace déviatorique. D'après les calculs effectués dans la première partie (§ III.4.2), les deux conditions

$$\|\underline{\underline{S}}_A\| > 2\sqrt{2}k_o \qquad \text{(II.1.24)}$$

et

$$\|\Delta\underline{\underline{S}}\| > 2\sqrt{2}k_1 \qquad \text{(II.1.25)}$$

sont nécessaires pour que le cristal entre en charge plastique à chaque cycle de la phase de durcissement. Rappelons que, k_o est la limite d'élasticité initiale du cristal et k_1 la limite d'élasticité au début du premier cycle, c'est-à-dire à la fin de la première mise en charge $\underline{\underline{O}} \rightarrow \underline{\underline{S}}_A$

$$k_1 = k_o + \frac{g}{A}\left(\|\underline{\underline{S}}_m\| + \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2} - \sqrt{2}k_o \right) \qquad \text{(II.1.26)}$$

Nous supposons alors que les relations (II.1.24) et (II.1.25) sont vérifiées. Dans ce cas, nous avons montré que, dans la phase de durcissement, l'accroissement $\delta k_i = k_{i+1} - k_i$ de la limite d'élasticité du cristal durant le i-ème cycle suit une loi géométrique de raison ω,

$$\frac{\delta k_{i+1}}{\delta k_i} = \omega = \left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^2 \qquad \text{(II.1.27)}$$

si bien qu'à la fin du N-ième cycle, la limite d'élasticité k_{N+1} est donnée par :

$$k_{N+1} = k_1 + \delta k_1 \frac{1-\omega^N}{1-\omega} \qquad \text{(II.1.28)}$$

où,

$$\delta k_1 = \frac{2g}{A}\left(1 - \frac{\sqrt{2}g}{A}\right)\left(\|\underline{\underline{\Delta S}}\| - 2\sqrt{2}k_1\right) \qquad \text{(II.1.29)}$$

et k_1 et ω sont donnés par les équations (II.1.26) et (II.1.27). Nous pouvons donc exprimer k_{N+1} en fonction du nombre de cycles effectués N, du chargement macroscopique ($\underline{\underline{\Delta S}}$, $\underline{\underline{S}}_m$) et des constantes du matériau $\left(k_o,\ g,\ c=A-\sqrt{2}g-2\mu\right)$:

$$k_{N+1} = \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_1\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N} \qquad \text{(II.1.30)}$$

k_1 étant donné par l'équation (II.1.26). Bien entendu, la relation (II.1.30) n'est valable que dans la phase de durcissement. Pour que le cristal passe en phase d'adoucissement, il faut qu'à un certain moment k_{N+1} (équation II.1.30), atteigne la valeur de transition k_{tr} , où $k_{tr} = k_{lim}$ (voir équation I.2.3). Or, d'après la relation (II.1.30), la limite d'élasticité du cristal croît avec le nombre de cycles effectués mais tend, pour N infini, vers la valeur $\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}}$. La valeur $k_{tr} = k_{lim}$ ne peut

donc être atteinte que si elle est strictement inférieure à $\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}$, auquel cas la transition s'effectue après un nombre de cycles N_I défini par l'équation :

$$k_{N_I+1} = k_{tr} \ (= k_{lim}) \qquad \text{(II.1.31)}$$

Examinons maintenant, lorsqu'elle existe, la phase d'adoucissement qui débute donc au $(N_I + 1)$ -ième cycle. Il est facile de montrer que, puisqu'à la fin du N_I-ième cycle la condition

$$\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} > k_{lim} \qquad \text{(II.1.32)}$$

est satisfaite, le cristal entre en charge plastique à chaque cycle de la phase d'adoucissement. A la fin du N-ième cycle tel que $N \geqslant N_I$, la limite d'élasticité du cristal k_{N+1} est, d'après (II.1.7) :

$$k_{N+1} = k_{lim} - h \int_{N_I T}^{NT} \sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p}\, dt \qquad \text{(II.1.33)}$$

Comme pour la phase de durcissement, nous pouvons montrer que, dans la phase d'adoucissement , l'accroissement $\delta k_j = k_{j+1} - k_j$ (maintenant négatif) de la limite d'élasticité du cristal durant le j-ème cycle suit également une loi géométrique de raison φ :

$$\frac{\delta k_{j+1}}{\delta k_j} = \varphi = \left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B} \right)^2 \qquad \text{(II.1.34)}$$

Par conséquent à la fin du N-ième cycle , la limite d'élasticité k_{N+1} est donnée par :

$$k_{N+1} = k_{lim} + \left(\delta k_{N_I+1}\right) \frac{1-\varphi^{(N-N_I)}}{1-\varphi} \quad , \quad N \geqslant N_I \qquad (II.1.35)$$

où δk_{N_I+1} , l'accroissement (négatif) de la limite d'élasticité durant le (N_I+1)-ième cycle (i.e. le premier cycle d'adoucissement), vaut :

$$\delta k_{N_I+1} = k_{N_I+2} - k_{lim} = -\frac{2h}{B}\left(1+\frac{\sqrt{2}h}{B}\right)\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}k_{lim}\right) \qquad (II.1.36)$$

En tenant compte des équations (II.1.34) et (II.1.36), la relation (II.1.35) nous donne la limite d'élasticité du cristal en fonction du nombre de cycles effectués, du chargement macroscopique ($\|\Delta\underline{\underline{S}}\|$, k_{lim}) et des constantes du matériau (h, $c = B - \sqrt{2}h - 2\mu$) :

$$k_{N+1} = \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right)\left(1+\frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2(N-N_I)} \quad , \quad N \geqslant N_I \qquad (II.1.37)$$

La nouveauté, par rapport à la phase de durcissement, est que la suite k_{N+1} ne converge pas mais tend vers $-\infty$ puisque la raison φ (équation II.1.34) est strictement supérieure à l'unité. En réalité, la phase d'adoucissement s'achève avec la rupture du cristal, c'est-à-dire lorsque sa limite d'élasticité s'annule. Le nombre N_R de cycles écoulés à la rupture est donc défini par :

$$k_{N_R+1} = 0 \qquad (II.1.38)$$

Le calcul de la microdéformation plastique cumulée ϵ^p dans les deux phases ne pose aucun problème particulier. La loi de durcissement isotrope $\dot{k} = g\sqrt{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p}$ intégrée sur le i-ème cycle ($1 \leqslant i \leqslant N_I$) conduit à :

$$\delta k_i = k_{i+1} - k_i = g\int_{iT}^{(i+1)T}\sqrt{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p}\, dt = g\,\delta\epsilon_I^p \qquad \text{(II.1.39)}$$

si $\delta\epsilon_I^p$ désigne l'accroissement de la microdéformation plastique cumulée au cours du i-ème cycle. La relation (II.1.27) est donc également valable en remplaçant δk_i par $\delta\epsilon_I^p$, ce qui nous conduit à une relation analogue à (II.1.28), à savoir :

$$\epsilon_{N+1}^p = \epsilon_I^p + \delta\epsilon_I^p\,\frac{1-\omega^N}{1-\omega} \quad , \quad 0 \leqslant N \leqslant N_I \qquad \text{(II.1.40)}$$

où ϵ_I^p désigne la déformation plastique cumulée lors de la première mise en charge (trajet $O \rightarrow A$),

$$\epsilon_I^p = \frac{1}{A}\left(\|\underline{\underline{S}}_m\| + \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2} - \sqrt{2}k_o \right) \qquad \text{(II.1.41)}$$

et $\delta\epsilon_I^p$ son accroissement lors du premier cycle (trajet $A \rightarrow B \rightarrow A$) :

$$\delta\epsilon_I^p = \frac{2}{A}\left(1 - \frac{\sqrt{2}g}{A} \right)\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}k_1 \right) \qquad \text{(II.1.42)}$$

Ainsi la déformation plastique cumulée à la fin du N-ième cycle de la phase de durcissement ($O \leqslant N \leqslant N_I$) est donné par :

$$\in^{p}_{N+1}=\frac{1}{g}\left\{ \left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}-k_o\right)-\left[\left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}-k_o\right)-\frac{g}{A}\left(\|\underline{\underline{S}}_m\|+\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2}-\sqrt{2}k_o\right)\right]\left(1-\frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N}\right\}$$

(II.1.43)

D'une manière similaire, la loi d'adoucissement isotrope $\dot{k} = - h \sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p}$ intégrée sur le j-ème cycle ($N_I + 1 \leqslant j \leqslant N_R$) conduit à :

$$\delta k_j = k_{j+1}-k_j = -h\int_{jT}^{(j+1)T}\sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p}\, dt = -h\, \delta\in^{p}_{j} \qquad (II.1.44)$$

si bien qu'à la fin du N-ième cycle ($N_I \leqslant N \leqslant N_R$), nous obtenons (voir équation II.1.35) :

$$\in^{p}_{N+1} = \in^{p}_{N_I+1} + \delta\in^{p}_{N_I+1}\,\frac{1-\varphi^{(N-N_I)}}{1-\varphi} \quad , \; N_I \leqslant N \leqslant N_R \qquad (II.1.45)$$

où $\in^{p}_{N_I+1}$ est la déformation plastique cumulée dans la phase de durcissement et $\delta\in^{p}_{N_I+1}$ son accroissement durant le (N_I+1)-ième cycle :

$$\delta\in^{p}_{N_I+1} = \frac{2}{B}\left(1-\frac{\sqrt{2}h}{B}\right)\left(\|\Delta\underline{\underline{S}}\| - 2\sqrt{2}k_{lim}\right) \qquad (II.1.46)$$

A la fin du N-ième cycle de charge ($N_I \leqslant N \leqslant N_R$) la microdéformation plastique cumulée est alors :

$$\epsilon^p_{N+1} = \epsilon^p_{N_I+1} + \frac{1}{h}\left\{\left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right)\left[1-\left(1-\frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2(N-N_I)}\right]\right\}$$

(II.1.47)

Les relations (II.1.43) et (II.1.47) nous permettent de calculer la microdéformation plastique cumulée à tout instant d'un chargement périodique proportionnel, en fonction du nombre de cycles effectués et du chargement macroscopique.

II-2 CALCUL DU NOMBRE DE CYCLES A LA NUCLEATION D'UNE MICROFISSURE DE FATIGUE

Les calculs que nous venons d'effectuer nous permettent, entre autres choses, de calculer la limite d'élasticité du cristal à tout instant d'un chargement cyclique proportionnel (équations II.1.30 et II.1.37). La valeur k_{tr} de la limite d'élasticité qui signale la transition entre les phases de durcissement et d'adoucissement est connue d'avance puisqu'elle est égale à la limite d'endurance généralisée k_{lim} associée au chargement considéré. La nucléation d'une microfissure de fatigue se produit au moment de la rupture du cristal, c'est-à-dire après un nombre N_R de cycles. N_R est la somme des nombres de cycles N_I et N_{II} que durent les phases de durcissement et d'adoucissement respectivement. Les valeurs de N_I et N_{II} sont données par les équations :

$$k_{(N_I+1)} = k_{lim} \qquad \text{(II.2.1)}$$

et

$$k_{(N_I+N_{II}+1)} = 0 \qquad \text{(II.2.2)}$$

où k_{N_I+1} et $k_{(N_I+N_{II}+1)}$ sont donnés par les équations

(II.1.30) et (II.1.37) avec $N = N_I$ et $N = N_I + N_{II}$, respectivement. Le but que nous nous étions fixé est donc atteint. Nous sommes actuellement en mesure de calculer le nombre de cycles à la nucléation d'une microfissure de fatigue. Il n'a pas été nécessaire pour cela, d'introduire de nouvelles variables. Néanmoins, pour suivre un formalisme déjà classique, nous allons tout de même définir une variable d'endommagement. Le critère de fatigue proposé dans la première partie de la thèse pourra alors être interprété en termes de dommage. Ensuite, nous calculerons explicitement le nombre de cycles $N_R = N_I + N_{II}$ et nous obtiendrons finalement les courbes de Wöhler à la nucléation d'une fissure pour des chargements cycliques proportionnels.

II.2.1 DEFINITION D'UNE VARIABLE D'ENDOMMAGEMENT

Dans le paragraphe I.1, nous avons considéré que la rupture d'un cristal soumis à un chargement cyclique provient essentiellement de l'accumulation des déformations plastiques. C'est pour rendre compte de ce fait que, dans le paragraphe II.1, nous avons directement relié la décroissance de la limite d'élasticité du cristal (phase d'adoucissement) à la déformation plastique cumulée à partir d'un certain niveau. Il semble donc naturel d'adopter, comme mesure mécanique de l'endommagement D dans la phase de nucléation (stade 0), la microdéformation plastique cumulée $\in^p$. La loi d'évolution de cette variable d'endommagement est alors simplement donnée par :

$$\dot{D} = \sqrt{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p} = \dot{\epsilon}^p \qquad \text{(II.2.3)}$$

Nous adopterons désormais pour la limite d'élasticité k et la déformation plastique ϵ^p une notation fonctionnelle et non pas indicielle. Les quantités k_{N+1} et ϵ^p_{N+1} valables au début du (N+1)-ième cycle seront respectivement notées k(N) et $\epsilon^p(N)$, N désignant alors le nombre de cycles écoulés. De même D(N) désignera la valeur de D après que N cycles aient été effectués, soit :

$$D(N) = \epsilon^p(N) \qquad \text{(II.2.4)}$$

Cette variable d'endommagement n'est évidemment pas normalisée. Le dommage au moment de la nucléation d'une fissure est égal à la déformation plastique cumulée à la rupture du cristal ϵ^p_R qui est, en général, différente de l'unité. Nous pourrions normaliser cette variable d'endommagement et choisir $D(N) = \frac{\epsilon^p(N)}{\epsilon^p_R}$. Malheureusement, la déformation plastique cumulée à la rupture ϵ^p_R n'est pas, en général, une constante du matériau mais dépend aussi du chargement. Dans le cas d'une suite de chargements admettant des ϵ^p_R différents, la variable d'endommagement normalisée $D(N) = \frac{\epsilon^p(N)}{\epsilon^p_R}$ présentera donc des sauts de discontinuité au moment de passage d'un chargement à l'autre ce qui est physiquement inadmissible. Néanmoins, nous verrons plus loin que la déformation plastique cumulée à la rupture ϵ^p_R est la même pour deux chargements similaires. Nous utiliserons donc la variable d'endommagement normalisée uniquement dans le cas des suites de chargements similaires, ce

qui nous permettra alors de retrouver des représentations graphiques typiquement utilisées pour le cumul du dommage par fatigue.

La définition (II.2.4) conjuguée avec les équations (II.1.43) et (II.1.47) nous permet d'obtenir, dans le cas d'un chargement cyclique proportionnel, la valeur du dommage à tout instant de la phase de durcissement ($0 \leqslant N \leqslant N_I$),

$$D(N)=\frac{1}{g}\left\{ \left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}-k_o\right)-\left[\left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}-k_o\right)-\frac{g}{A}\left(\|\underline{\underline{S}}_m\|+\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2}-\sqrt{2}k_o\right)\right]\left(1-\frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N}\right\} \tag{II.2.5}$$

et de la phase d'adoucissement (c'est-à-dire pour $N_I \leqslant N \leqslant N_R$)

$$D(N) = D(N_I)+ \frac{1}{h}\left\{ \left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} -k_{lim}\right) \left[1-\left(1-\frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2(N-N_I)}\right] \right\} \tag{II.2.6}$$

Au moment de la transition entre ces deux phases, le niveau du dommage $D(N_I)$, que nous noterons D_I, peut être exprimé de manière simple. En effet, l'intégration de la loi d'écrouissage isotrope $\dot{k} = g \sqrt{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p}$ sur toute la phase de durcissement conduit à :

$$k(N_I) - k_o = g \in^p(N_I) \tag{II.2.7}$$

soit encore, puisque $k(N_I) = k_{lim}$ et $\epsilon^p(N_I) = D_I$:

$$D_I = \frac{k_{lim} - k_o}{g} \qquad (II.2.8)$$

De la même manière, le niveau du dommage $D(N_R)$, noté D_R, au moment de la rupture du cristal peut être calculé en intégrant la loi d'écrouissage $\dot{k} = - h \sqrt{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p}$ sur toute la phase d'adoucissement. Nous obtenons alors :

$$k(N_R) - k(N_I) = -h \left(\epsilon^p(N_R) - \epsilon^p(N_I) \right) \qquad (II.2.9)$$

soit encore, puisque $k(N_R) = 0$, $k(N_I) = k_{lim}$, $\epsilon^p(N_I) = D_I$ et $\epsilon^p(N_R) = D_R$:

$$D_R = D_I + \frac{k_{lim}}{h} \quad \Rightarrow \quad D_R = \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) k_{lim} - \frac{k_o}{g} \qquad (II.2.10)$$

Cette dernière égalité montre que D_R , c'est-à-dire la déformation plastique cumulée à la rupture ϵ^p_R, est une fonction affine de k_{lim}. A l'image de k_{lim}, ϵ^p_R dépend donc du chargement appliqué mais est identique pour deux chargements similaires.

Les courbes d'évolution du dommage et de la limite d'élasticité en fonction du nombre de cycles, lors d'un chargement proportionnel, ont été tracées sur la figure II.2 pour des valeurs numériques typiques.

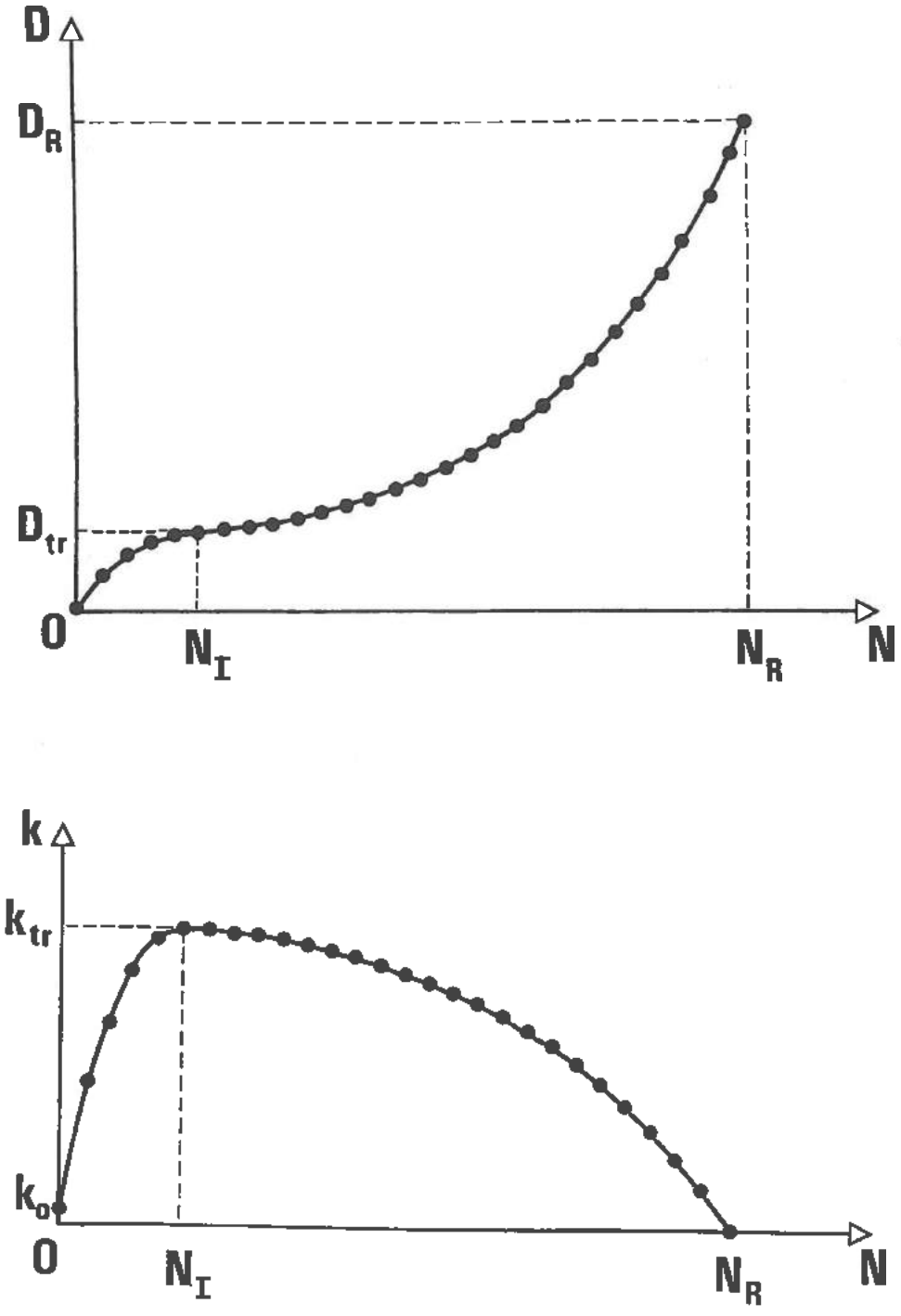


Figure II.2 Evolution du dommage et de la limite d'élasticité du cristal pour un chargement cyclique proportionnel.

Il est intéressant de noter que la courbe du dommage est concave durant la phase de durcissement puis convexe durant la phase d'adoucissement alors que les définitions classiques de l'endommagement (voir § I.1) conduisent toutes à une courbe du dommage convexe. Cette particularité nous permet de prévoir que, si pour un chargement cyclique donné, le cristal reste continûment dans la phase de durcissement sans que la limite d'élasticité n'atteigne la valeur k_{lim}, le dommage cumulé reste borné puisqu'inférieur à D_I . Cette propriété nous permettra d'interpréter en termes de dommage, le critère de fatigue proposé dans la première partie de la thèse.

Pour clore ce paragraphe, signalons que la courbe d'évolution de la limite d'élasticité k en fonction de la déformation plastique cumulée $\in^p$ est particulièrement simple. L'équation (II.2.7) établie pour N_I est également vraie pour tout N tel que $0 \leqslant N \leqslant N_I$:

$$k(N) = k_o + g \in^p(N) \quad , \quad 0 \leqslant N \leqslant N_I \qquad \text{(II.2.11)}$$

De même, l'équation (II.2.9) écrite pour N_R , est encore valable pour N tant que $N_I \leqslant N \leqslant N_R$:

$$k(N) = k_{lim} - h \left(\in^p(N) - \in^p(N_I)\right) \quad , \quad N_I \leqslant N \leqslant N_R \qquad \text{(II.2.12)}$$

Les équations (II.2.11) et (II.2.12) peuvent être regroupées sous la forme

$$k(\in^p) = \left(k_o + g\in^p\right)\left[1 - H\left(\in^p - \in^p_{tr}\right)\right] + \left[k_{tr} - h\left(\in^p - \in^p_{tr}\right)\right] H\left(\in^p - \in^p_{tr}\right)$$

(II.2.13)

où ϵ^p_{tr} et k_{tr} sont les valeurs respectives de la déformation plastique cumulée et de la limite d'élasticité à la transition $\left(\epsilon^p_{tr} = \epsilon^p(N_I),\ k_{tr} = k_{lim}\right)$, et H désigne la fonction de Heaviside. La courbe associée à cette équation est représentée sur la figure II.3.

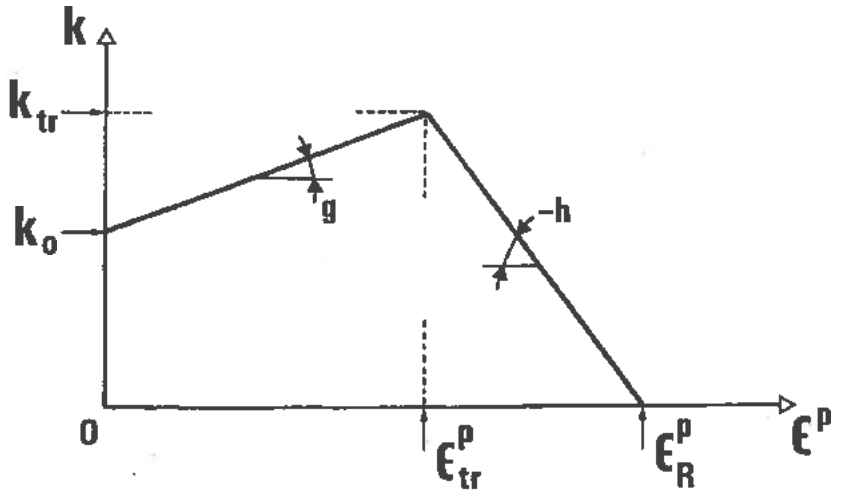


Figure II.3 Evolution de la limite d'élasticité du cristal en fonction de la déformation plastique cumulée

Puisque ϵ^p_{tr} et k_{tr} sont constants pour des chargements similaires et que k_o, g, et h ne dépendent que du matériau, la courbe $k(\epsilon^p)$ est identique pour deux chargements similaires. Pour deux chargements non similaires, les deux courbes obtenues admettent toutefois une partie ascendante commune.

II.2.2 INTERPRETATION DU CRITERE DE FATIGUE EN TERMES DE DOMMAGE

Rappelons que le critère de fatigue proposé dans la première partie (§ III.4.3) s'écrit :

$$k^* \leqslant k_{lim} \qquad \text{(II.2.14)}$$

où k_{lim} est la limite d'endurance généralisée du chargement considéré et k^* la limite d'élasticité du cristal dans son état adapté. Dans le cas qui nous intéresse (chargement cyclique proportionnel), nous savons que $k^* = \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}}$ (voir § III.4.1), première partie). Le critère de fatigue devient donc :

$$\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} \leqslant k_{lim} \qquad \text{(II.2.15)}$$

Si cette dernière inégalité est satisfaite, la transition entre les phases de durcissement et d'adoucissement n'a pas lieu puisqu'alors, la limite d'élasticité du cristal, ne peut pas atteindre la valeur $k_{lim} = k_{tr}$ au bout d'un nombre fini de cycles (voir § II.2.1). La valeur du dommage durant un tel chargement est donnée par l'équation (II.2.5) qui, lorsque N tend vers l'infini, conduit à :

$$\lim_{N \to +\infty} D(N) = \frac{1}{g} \left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_o \right) \qquad \text{(II.2.16)}$$

En utilisant l'équation (II.2.8) qui donne la valeur du dommage D_I à la transition, les relations (II.2.15) et (II.2.16) conduisent à :

$$\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \leqslant k_{lim} \Rightarrow \frac{1}{g}\left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_o\right) \leqslant \frac{k_{lim}-k_o}{g} \Rightarrow \boxed{\lim_{N\to+\infty} D(N) \leqslant D_I} \qquad \text{(II.2.17)}$$

Inversement, si l'inégalité $\lim_{N\to+\infty} D(N) \leqslant D_I$ est vérifiée, la transition ne peut avoir lieu puisque le dommage, i.e. la déformation plastique cumulée ne peut pas atteindre la valeur $D_I = \in^p_{tr}$ au bout d'un nombre fini de cycles. La valeur du dommage lorsque N tend vers l'infini est encore donnée par l'équation (II.2.16) qui, grâce à l'inégalité (II.2.17) conduit à l'expression du critère de fatigue pour un chargement proportionnel (équation II.2.15). Nous venons ainsi de démontrer l'équivalence,

$$k^* \leqslant k_{lim} \iff \lim_{N\to+\infty} D(N) \leqslant D_I \qquad \text{(II.2.18)}$$

pour des chargements proportionnels. Le critère de fatigue (équation II.2.14) peut donc être formulé de la manière suivante :

<u>Lors d'un chargement cyclique, il n'y aura pas nucléation d'une fissure de fatigue si et seulement si le dommage cumulé reste inférieur ou égal à la valeur critique D_I.</u>

Cette valeur critique D_I, reliée à la limite d'endurance par la relation (II.2.8) (i.e. $D_I = \frac{1}{g}(k_{lim} - k_o)$), peut être calculée d'avance à partir des caractéristiques

du chargement proportionnel considéré. Nous savons en effet que k_{lim} est donné par (équation III.4.95, première partie)

$$k_{lim} = \frac{- \alpha \mathcal{P}_m + \beta}{\alpha \mathcal{P}_a + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}} \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \qquad \text{(II.2.19)}$$

où $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_m$ sont respectivement l'amplitude et la valeur moyenne de la pression hydrostatique macroscopique.

II.2.3 MODIFICATION DU DOMAINE DE NON NUCLEATION DES FISSURES DE FATIGUE PAR UN PRECHARGEMENT CYCLIQUE

L'interprétation en termes de dommage du critère de fatigue permet d'étudier l'influence d'un préchargement cyclique sur le domaine Ω de non nucléation des fissures de fatigue.

Ce domaine Ω a été défini dans le plan (p,k) (voir § III.4.3, première partie). Néanmoins, comme nous nous limitons à des chargements proportionnels pour lesquels $k^* = \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}$, nous utiliserons ici le plan $\left(p, \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}\right)$. Pour le matériau vierge, le domaine Ω est alors défini par :

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2=\left\{\left(p,\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}\right)\ /\ \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}\leqslant-\alpha p+\beta\right\}\cup\left\{\left(p,\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}\right)\ /\ \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}\leqslant k_o\right\}$$

(II.2.20)

Dorénavant, toutes les quantités relatives au préchargement seront signalées par l'indice supérieur (1) et celles relatives à un chargement ultérieur par l'indice (2).

Nous écartons à priori les préchargements qui ne modifient que peu ou pas du tout le domaine de non nucléation Ω. Ce sont ceux pour lesquels le comportement du cristal est toujours élastique sauf éventuellement durant la première mise en charge. Le nouveau domaine $\tilde{\Omega}$ est alors donné par l'équation (II.2.20) dans laquelle k_o est éventuellement remplacé par la limite d'élasticité $k_1^{(1)}$ à la fin de la première mise en charge. Comme $k_1^{(1)}$ est proche de k_o , nous pouvons considérer que le domaine de non nucléation des fissures de fatigue n'est pas modifié. Dans la suite, nous supposerons que les préchargements donnent lieu à une plastification des cristaux à chaque cycle de charge, c'est-à-dire :

$$\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}}>k_o\quad\text{et}\quad\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}}>k_1^{(1)}.$$

Nous allons d'abord étudier le cas où le préchargement cyclique, appliqué durant N_1 cycles, ne viole pas le

critère de fatigue du matériau, $\left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} < k_{1im}^{(1)} \right)$. Nous parlerons alors de sous-chargement cyclique initial. Dans ces conditions, le cristal reste toujours en phase de durcissement et, après N_1 cycles de charge, sa limite d'élasticité vaut (voir équation II.1.30)

$$k(N_1) = \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_1^{(1)} \right) \left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A} \right)^{2N_1} \qquad \text{(II.2.21)}$$

où (voir aussi équation II.1.26)

$$k_1^{(1)} = k_o + \frac{g}{A} \left(\|\underline{\underline{S}}_m\|^{(1)} + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2} - \sqrt{2}\, k_o \right) \qquad \text{(II.2.22)}$$

Un tel préchargement augmente le domaine d'élasticité initial Ω_2 du cristal et donc le domaine de non nucléation Ω qui devient alors :

$$\tilde{\Omega} = \Omega_1 \cup \tilde{\Omega}_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\Omega} = \left\{ \left(p, \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \right) / \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \leqslant -\alpha p + \beta \right\} \cup \left\{ \left(p, \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \right) / \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \leqslant k(N_1) \right\}$$

(II.2.23)

Un sous-chargement cyclique initial améliore donc le matériau dans la mesure où la limite d'endurance généralisée de certains chargements a été accrue. En l'occurrence, il s'agit des chargements dont la limite d'endurance généra-

lisée $k_{lim}^{(2)}$ était initialement inférieure à $k(N_1)$. Leur nouvelle limite d'endurance $\tilde{k}_{lim}^{(2)}$ est maintenant égale à $k(N_1)$. En revanche, le matériau est inchangé vis-à-vis des chargements dont la limite d'endurance généralisée $k_{lim}^{(2)}$ était initialement supérieure à $k(N_1)$, i.e. $\tilde{k}_{lim}^{(2)} = k_{lim}^{(2)}$. Cette modification du domaine Ω est illustrée sur la figure II.4. L'amélioration maximale due à un sous-chargement cyclique initial donné est obtenue pour un nombre N de cycles, tendant vers l'infini, auquel cas $k(N_1)$ tend vers $\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}}$, (voir Fig. II.4).

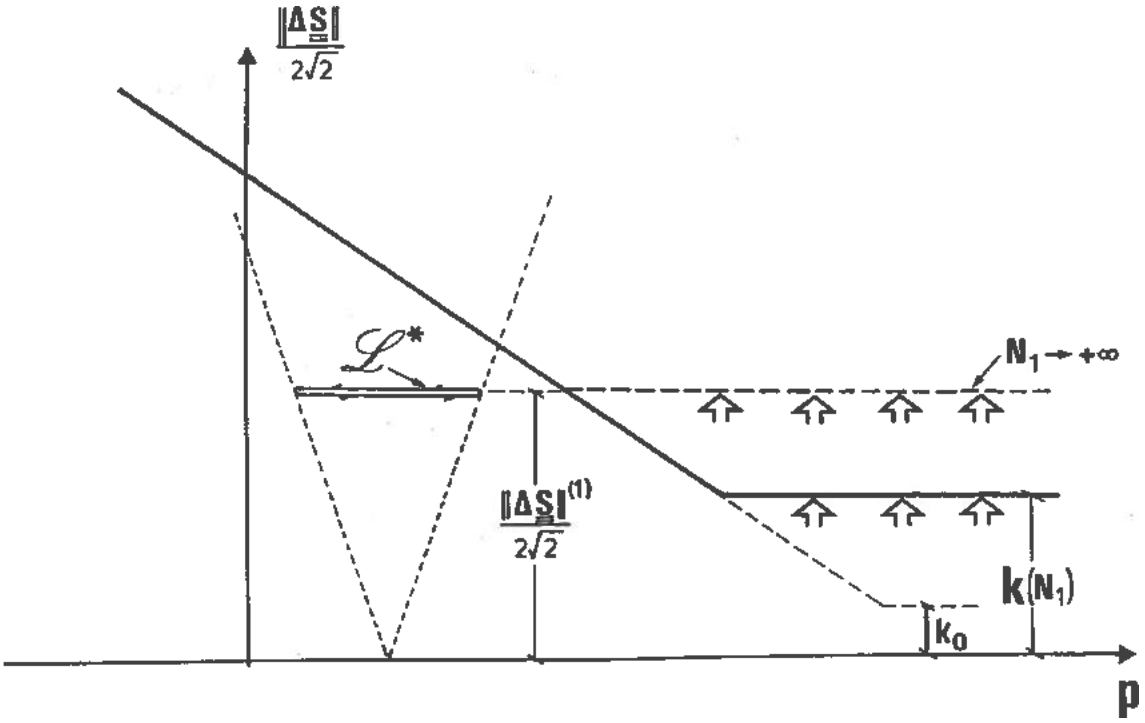


Figure II.4 Modification du domaine de non nucléation des fissures de fatigue par un sous-chargement inital de trajet réduit $\mathscr{L}^* \in \Omega$ appliqué pendant N_1 cycles.

Nous allons maintenant étudier le cas où le préchargement cyclique, appliqué durant N_1 cycles, viole le critère de fatigue, c'est-à-dire $\frac{\|\underline{\Delta S}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} > k_{lim}^{(1)}$. Nous parlerons alors de <u>sur-chargement</u> cyclique initial. Deux configurations sont possibles suivant qu'à la fin du préchargement, le cristal est encore en phase de durcissement $\left(N_1 \leqslant N_I^{(1)}\right)$ ou déjà en phase d'adoucissement $\left(N_1 > N_I^{(1)}\right)$.

Dans le premier cas $\left(N_1 \leqslant N_I^{(1)}\right)$, le critère de fatigue est modifié de la même manière que dans le cas d'un sous-chargement cyclique initial car les équations (II.2.21), (II.2.22) et (II.2.23) sont encore valables. La seule différence est que l'amélioration maximale peut être maintenant obtenue pour un nombre fini de cycles d'application, c'est-à-dire pour $N_1=N_I^{(1)}$, auquel cas $k(N_1) = k_{lim}^{(1)}$.

Les modifications précédentes sont illustrées dans la figure II.5.

Comme dans le cas du sous-chargement cyclique initial, le matériau n'est effectivement amélioré que vis-à-vis des chargements dont la limite d'endurance généralisée $k_{lim}^{(2)}$, était initialement inférieure à $k(N_1)$, auquel cas nous avons $\tilde{k}_{lim}^{(2)} = k(N_1)$, (Fig. II.5).

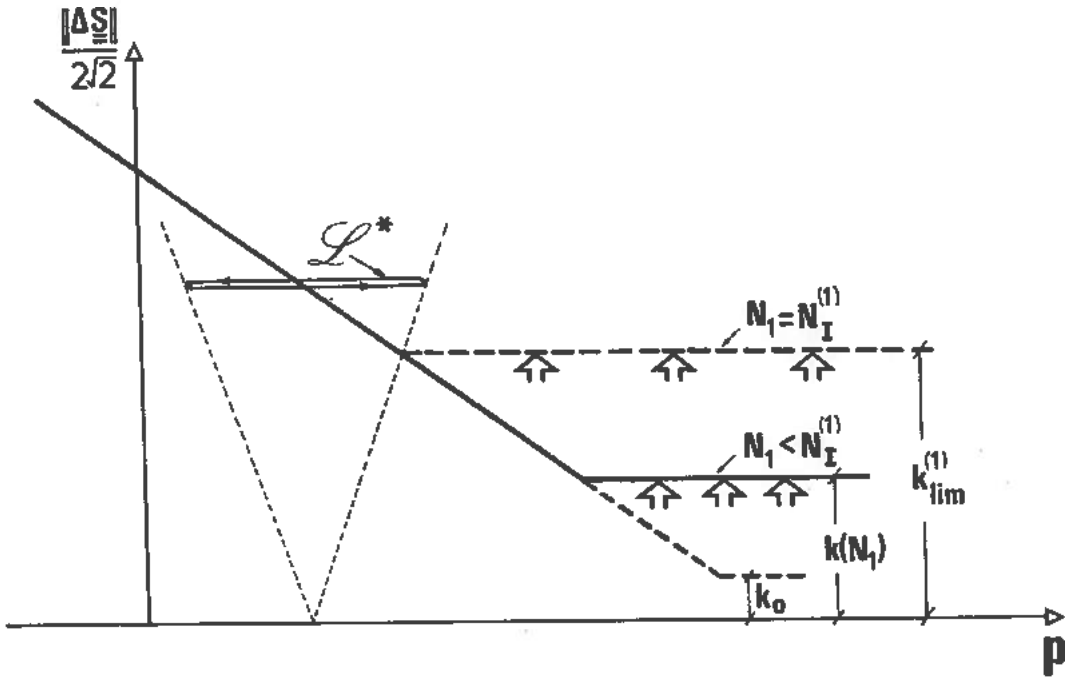


Figure II.5 Modification du domaine de non nucléation des fissures de fatigue par un sur-chargement cyclique initial de trajet réduit $\mathscr{L}^* \notin \Omega$, appliqué pendant N_1 cycles $\left(N_1 \leqslant N_I^{(1)}\right)$.

En revanche, si, à la fin des N_1 cycles de sur-chargement, le cristal est déjà en phase d'adoucissement $\left(N_1 > N_I^{(1)}\right)$, la modification du domaine Ω est plus com-

plexe. A la fin du sur-chargement, la limite d'élasticité du cristal est donnée par, (voir aussi équation II.1.37) :

$$k(N_1) = \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(1)}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2\left(N_1 - N_I^{(1)}\right)} \qquad (II.2.24)$$

Nous supposons bien évidemment que le sur-chargement est interrompu avant la rupture du matériau $\left(N_1 < N_R^{(1)}\right)$. Lorsque N_1 varie de $N_I^{(1)}$ à $N_R^{(1)}$, $k(N_1)$ décroît de k_{lim} à 0. Nous pouvons d'ores et déjà affirmer que le matériau est amélioré vis-à-vis des chargements dont la limite d'endurance généralisée $k_{lim}^{(2)}$ était initialement inférieure à $k(N_1)$, puisqu'elle devient par la suite $\tilde{k}_{lim}^{(2)} = k(N_1)$. Néanmoins, cette amélioration n'est effective que si N_1 est suffisamment faible pour que $k(N_1)$ reste supérieur à k_o. Si ce n'est pas le cas, il n'existe pas de chargement dont la limite d'endurance initiale $k_{lim}^{(2)}$ soit inférieure à $k(N_1)$ puisque, d'après l'équation (II.2.20), $k_{lim}^{(2)} > k_o$. Pour un chargement dont la limite d'endurance initiale $k_{lim}^{(2)}$ est supérieure à $k(N_1)$, nous devons distinguer deux cas suivant la position de son dommage de transition $D_I^{(2)}$ par rapport au dommage cumulé $D(N_1)$ durant le préchargement.

Examinons tout d'abord le cas où le chargement qui doit être appliqué en second possède un dommage de transition $D_I^{(2)}$ inférieur au dommage cumulé $D(N_1)$ durant le préchargement. Le cristal peut alors, soit continuer en phase d'adoucissement jusqu'à la rupture, soit se comporter élastiquement, si le chargement ne viole pas son critère

d'élasticité actuel, i.e. si $\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} \leqslant k(N_1)$. Autrement dit, la limite d'endurance généralisée de ce chargement vaut maintenant $k(N_1)$. Un sur-chargement cyclique initial appliqué durant N_1 cycles $\left(N_1 > N_I^{(1)}\right)$ affaiblit donc le matériau vis-à-vis des chargements dont la limite d'endurance généralisée $k_{lim}^{(2)}$ était initialement supérieur à $k(N_1)$ et dont le dommage de transition $D_I^{(2)}$ est inférieur au dommage cumulé $D(N_1)$. Leur nouvelle limite d'endurance vaut ensuite $\tilde{k}_{lim}^{(2)} = k(N_1)$.

Examinons, enfin, le cas où le chargement qui doit être appliqué a encore une limite d'endurance initiale $k_{lim}^{(2)}$ supérieure à $k(N_1)$ mais possède un dommage de transition $D_I^{(2)}$ supérieur au dommage cumulé $D(N_1)$. Bien qu'en fin de préchargement, le cristal se trouve en phase d'adoucissement, soit il revient en phase de durcissement puisque $D(N_1) < D_I^{(2)}$, soit il se comporte élastiquement si le second chargement respecte son critère d'élasticité actuel i.e. si $\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} < k(N_1)$. Dans les deux cas, le critère de fatigue s'écrit alors :

$$\lim_{N_2 \to +\infty} \left(D(N_1) + D(N_2) \right) \leqslant D_I^{(2)} \qquad \text{(II.2.25)}$$

où $D(N_2)$ est le dommage cumulé après l'application de N_2 cycles du second chargement. Le dommage $D(N_1)$ cumulé durant le préchargement est :

$$D(N_1) = D_I^{(1)} + \frac{1}{h}\left(k_{lim}^{(1)} - k(N_1)\right) = \frac{1}{g}\left(k_{lim}^{(1)} - k_o\right) + \frac{1}{h}\left(k_{lim}^{(1)} - k(N_1)\right) \qquad \text{(II.2.26)}$$

Durant les N_2 cycles d'application du chargement, le dommage cumulé est donné par :

$$D(N_2) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \dfrac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} < k(N_1) \\ \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)\right)\left(1-\left(1-\dfrac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N_2}\right) \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{II.2.27}$$

D'autre part, nous savons que :

$$D_I^{(2)} = \frac{1}{g}\left(k_{lim}^{(2)} - k_o\right) \tag{II.2.28}$$

La condition de non nucléation (II.2.25), compte tenu des équations (II.2.26), (II.2.27), et (II.2.28) devient :

$$\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} \leqslant \max\left\{\left[k_{lim}^{(2)} - \left(1+\frac{g}{h}\right)\left(k_{lim}^{(1)} - k(N_1)\right)\right]; [k(N_1)]\right\} \tag{II.2.29}$$

Autrement dit, la nouvelle limite d'endurance généralisée du chargement considéré est :

$$\tilde{k}_{lim}^{(2)} = \max\left\{\left[k_{lim}^{(2)} - \left(1+\frac{g}{h}\right)\left(k_{lim}^{(1)} - k(N_1)\right)\right]; [k(N_1)]\right\} \tag{II.2.30}$$

Elle est donc inférieure à sa valeur initiale $k_{lim}^{(2)}$. Un sur-chargement cyclique initiale appliqué durant N_1 cycles $\left(N_1 > N_I^{(1)}\right)$ affaiblit le matériau vis-à-vis des chargements dont la limite d'endurance généralisée $k_{lim}^{(2)}$ était initialement supérieure à $k(N_1)$ et dont le dommage de transition

$D_I^{(2)}$ est supérieur au dommage cumulé $D(N_1)$ par le préchargement.

En regroupant les résultats obtenus dans les trois derniers cas de figure, nous obtenons la forme modifiée $\tilde{\Omega}$ du domaine de non nucléation de fissures de fatigue, après un sur-chargement cyclique initial appliqué durant N_1 cycles $\left(N_1 > N_I^{(1)}\right)$:

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\Omega} = \left\{ \left(p, \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}\right) / \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \leqslant -\alpha p+\beta - \left(1+\frac{g}{h}\right)\left[k_{lim}^{(1)} - k(N_1)\right] \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \left(p, \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}\right) / \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \leqslant k(N_1) \right\} \qquad \text{(II.2.31)}$$

Ce domaine est représenté sur la figure II.6 .

Pour clore ce paragraphe, nous présentons dans les pages 303 et 304 un organigramme qui, pour un préchargement défini par son amplitude $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}$, sa limite d'endurance $k_{lim}^{(1)}$, son nombre de cycles d'application N_1, donne le nouveau domaine $\tilde{\Omega}$ de non nucléation des fissures de fatigue.

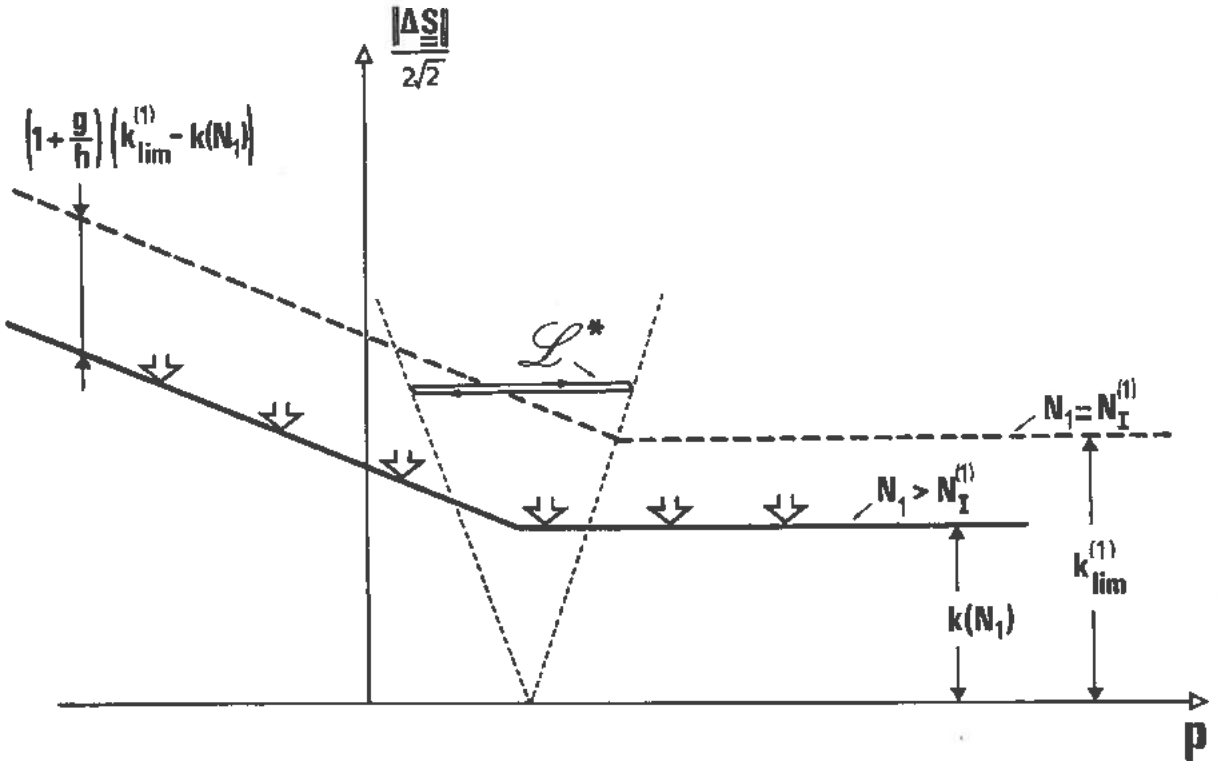
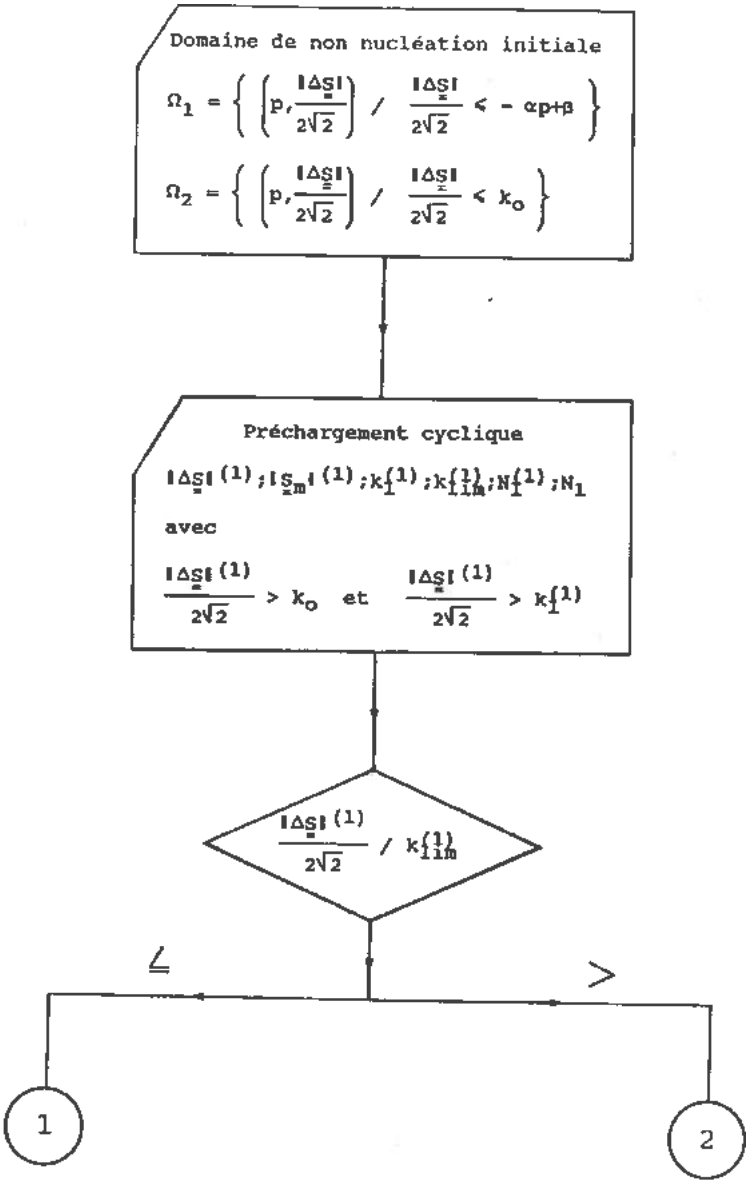
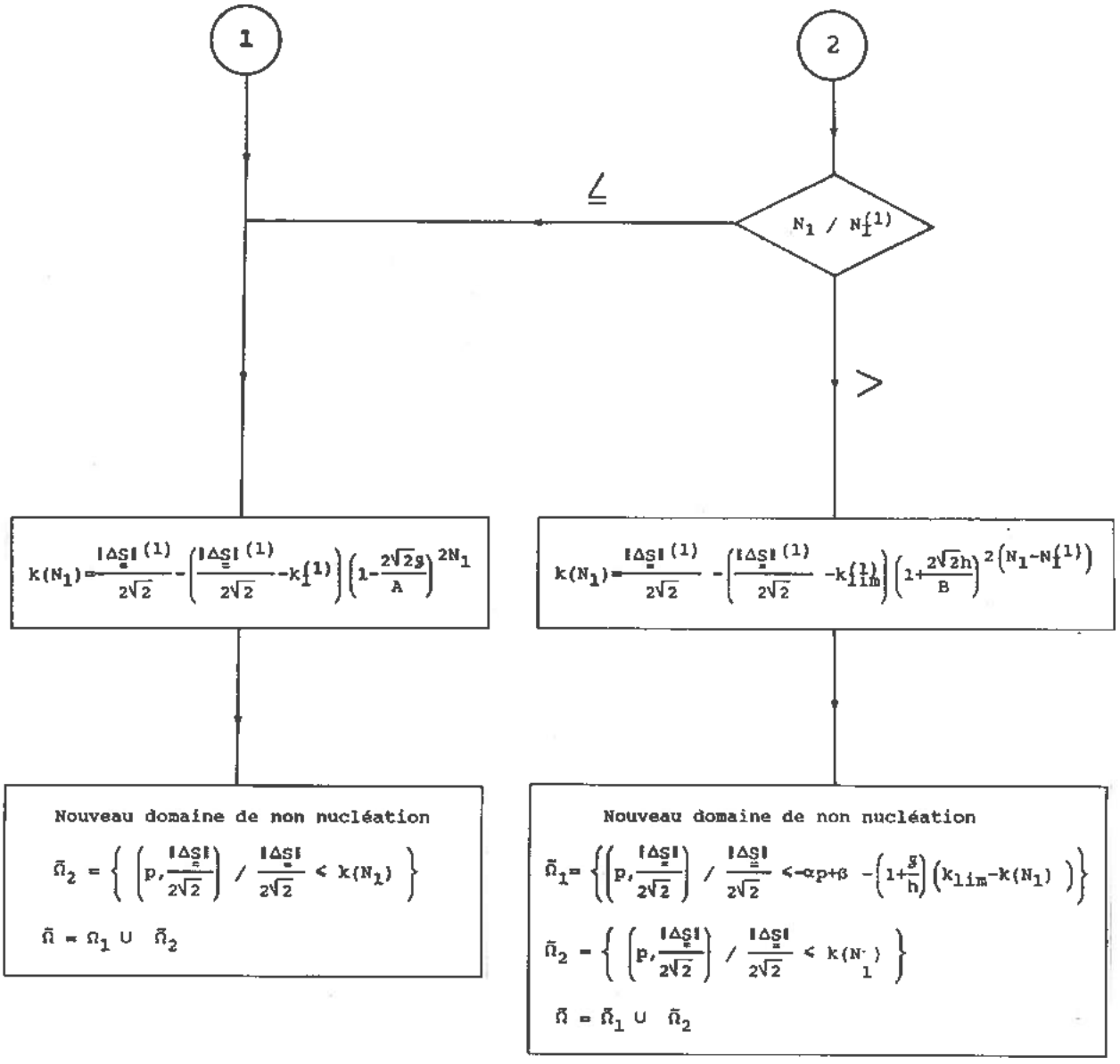


Figure II.6 Modification du domaine de non nucléation des fissures de fatigue par un sur-chargement cyclique initial de trajet réduit $\mathcal{L}^* \in \Omega$, appliqué durant N_1 cycles $\left(N_1 > N_I^{(1)}\right)$.

ORGANIGRAMME I




1
2
≤
>
$N_1 / N_1^{(1)}$
$k(N_1)=\frac{|\Delta\underline{S}|^{(1)}}{2\sqrt{2}}-\left(\frac{|\Delta\underline{S}|^{(1)}}{2\sqrt{2}}-k_1^{(1)}\right)\left(1-\frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N_1}$
$k(N_1)=\frac{|\Delta\underline{S}|^{(1)}}{2\sqrt{2}}-\left(\frac{|\Delta\underline{S}|^{(1)}}{2\sqrt{2}}-k_{lim}^{(1)}\right)\left(1+\frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2\left(N_1-N_1^{(1)}\right)}$
Nouveau domaine de non nucléation
$\tilde{\Omega}_2=\left\{\left(p,\frac{|\Delta\underline{S}|}{2\sqrt{2}}\right) / \frac{|\Delta\underline{S}|}{2\sqrt{2}} < k(N_1)\right\}$
$\tilde{\Omega}=\Omega_1 \cup \tilde{\Omega}_2$
Nouveau domaine de non nucléation
$\tilde{\Omega}_1=\left\{\left(p,\frac{|\Delta\underline{S}|}{2\sqrt{2}}\right) / \frac{|\Delta\underline{S}|}{2\sqrt{2}} <-\alpha p+\beta -\left(1+\frac{g}{h}\right)\left(k_{lim}-k(N_1)\right)\right\}$
$\tilde{\Omega}_2=\left\{\left(p,\frac{|\Delta\underline{S}|}{2\sqrt{2}}\right) / \frac{|\Delta\underline{S}|}{2\sqrt{2}} < k(N_1^-)\right\}$
$\tilde{\Omega}=\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$

II.2.4 CALCUL DU NOMBRE DE CYCLES EFFECTUES DANS LES DEUX PHASES DE COMPORTEMENT DU CRISTAL

Nous écartons ici le cas où le critère de fatigue n'est pas violé $\left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \leqslant k_{lim} \right)$. Nous savons en effet que, dans ce cas, le cristal reste toujours en phase de durcissement (donc, $N_I = +\infty$, $N_{II} = 0$). Supposons alors que le chargement proportionnel considéré est tel que :

$$\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} > k_{lim} \qquad \text{(II.2.32)}$$

Le nombre de cycles N_I que dure la phase de durcissement est donné par les équations (II.2.1) et (II.1.30) réunies, soit :

$$k_{N+1} = \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_1 \right) \left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A} \right)^{2N_I} = k_{lim} \qquad \text{(II.2.33)}$$

ou encore, en isolant N_I :

$$N_I = \frac{1}{2\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A} \right)} \mathrm{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_1} \right) \qquad \text{(II.2.34)}$$

Cette expression peut être simplifiée grâce aux ordres de grandeur relatifs des constantes g et $A = c + 2\mu + \sqrt{2}\, g$. Nous savons expérimentalement que le module de durcissement g est au plus égal au centième du module élastique

de cisaillement μ. Il en découle que

$$\frac{2\sqrt{2}g}{A} << 1 \qquad \text{(II.2.35)}$$

ce qui justifie l'approximation :

$$\text{Ln}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right) \simeq - \frac{2\sqrt{2}g}{A} \qquad \text{(II.2.36)}$$

L'équation (II.2.34) s'écrit alors :

$$N_I = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_1}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) \qquad \text{(II.2.37)}$$

Le nombre de cycles N_{II} que dure la phase d'adoucissement est donné par les équations (II.2.2) et (II.1.37) réunies, soit :

$$k_{(N_I+N_{II}+1)} = \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2N_{II}} = 0 \qquad \text{(II.2.38)}$$

d'où nous tirons :

$$N_{II} = \frac{1}{2\text{Ln}\left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) \qquad \text{(II.2.39)}$$

La remarque concernant les ordres de grandeur relatifs des constantes A et g est également valable pour les constantes h et B :

$$\frac{2\sqrt{2}h}{B} << 1 \qquad \text{(II.2.40)}$$

d'où

$$\text{Ln}\left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right) \simeq \frac{2\sqrt{2}h}{B} \qquad \text{(II.2.41)}$$

Nous retiendrons donc, pour N_{II}, l'expression simplifiée :

$$N_{II} = \frac{B}{4\sqrt{2}h}\ \text{Ln}\left(\frac{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}\right) \qquad \text{(II.2.42)}$$

Si nous tenons compte des équations (II.1.26) et (II.2.19) donnant k_1 et k_{lim} respectivement, N_I (équation II.2.37) et N_{II} (équation II.2.42) sont alors exprimés en fonction du chargement macroscopique ($\|\Delta\underline{\underline{S}}\|$, $\|\underline{\underline{S}}_m\|$, $\mathcal{P}_a$, $\mathcal{P}_m$) et des constantes du matérieu (α, β, k_o, g, h, A, B). Nous savons que α et β peuvent être identifiés à partir des limites d'endurance en torsion et en flexion alternée, par exemple

(voir § III.4.3, première partie, équations III.4.99 et III.4.101). D'autre part, les quatre constantes (g, h, A, B) ne sont pas indépendantes puisque $A = c + 2\mu + \sqrt{2}\,g$ et

$B = c + 2\mu - \sqrt{2}\, h$ où μ est le module élastique macroscopique de cisaillement supposé connu. Finalement, le calcul effectif de N_I et N_{II} nécessite l'identification de seulement quatre constantes à savoir le module d'écrouissage cinématique c, les modules de durcissement et d'adoucissement g et h, et la limite d'élasticité initiale du cristal k_o.

II.2.5 COURBE DE WÖLHER A LA NUCLEATION

Le nombre de cycles N_R à la rupture du cristal i.e. à la nucléation d'une fissure, est égale à la somme des nombres de cycles effectués dans chacune des deux phases de comportement :

$$N_R = N_I + N_{II} \qquad \text{(II.2.43)}$$

En utilisant les équations (II.2.37) et (II.2.42), nous obtenons :

$$N_R = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \operatorname{Ln}\left(\frac{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_1}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}\right) + \frac{B}{4\sqrt{2}h} \operatorname{Ln}\left(\frac{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}\right) \qquad \text{(II.2.44)}$$

soit encore

$$N_R=\left(\frac{A}{4\sqrt{2}g}+\frac{B}{4\sqrt{2}h}\right)\mathrm{Ln}\left(\frac{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}-k_{1lim}}\right)+\frac{A}{4\sqrt{2}g}\mathrm{Ln}\left(1-\frac{2\sqrt{2}k_1}{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}\right) \qquad \text{(II.2.45)}$$

Rappelons que k_1 , la limite d'élasticité du cristal à la fin de la première mise en charge, est donnée par :

$$k_1= k_o+ \frac{g}{A}\left(\| \underline{\underline{S}}_m \| + \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2} - \sqrt{2}\, k_o \right) \qquad \text{(II.2.46)}$$

Nous savons expérimentalement que g est petit devant A et que la limite d'élasticité initiale du cristal est faible par rapport au niveau des chargements couramment appliqués. Par conséquent, la quantité $\frac{2\sqrt{2}\ k_1}{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}$ étant petite devant l'unité, l'approximation

$$\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}\ k_1}{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|} \right) \simeq - \frac{2\sqrt{2}\ k_1}{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|} \qquad \text{(II.2.47)}$$

est légitime. En tenant compte des égalités (II.2.46) et (II.2.47), l'expression (II.2.45) devient :

$$N_R=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{A}{g}+\frac{B}{h}\right)\mathrm{Ln}\left(\frac{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}-k_{1lim}}\right)-\left(\frac{A}{\sqrt{2}g}-1\right)\frac{\sqrt{2}k_o}{2\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}-\frac{1}{2\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}\left(\|\underline{\underline{S}}_m\|+\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2}\right)$$

(II.2.48)

La courbe représentative de cette équation dans le plan (N_R, $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|$) est <u>la courbe de Wöhler généralisée à la nucléation</u> pour un chargement multiaxial cyclique proportionnel. Elle relie le nombre de cycles écoulés lorsqu'apparaît une fissure de fatigue, à la norme du tenseur variation des contraintes déviatoriques $\Delta\underline{\underline{S}}$, pour un état déviatorique moyen donné $\underline{\underline{S}}_m$. Il faut souligner que l'amplitude $\mathcal{P}_a$ et la valeur moyenne $\mathcal{P}_m$ de la pression hydrostatique interviennent également par l'intermédiaire de k_{lim} (équation II.2.19). Lorsque N_R tend vers l'infini, cette courbe de Wöhler admet une asymptote définie par $\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} = k_{lim}$. Elle rend donc compte de l'existence d'un critère de fatigue qui est précisément celui proposé dans la première partie de la thèse. Enfin, remarquons que, contrairement à la limite d'endurance généralisée k_{lim}, le nombre de cycles à la nucléation N_R dépend du déviateur macroscopique moyen $\underline{\underline{S}}_m$. Cette influence qui se manifeste dans le dernier terme du membre de droite (équation II.2.48), provient de la première mise en charge du cristal entre l'état naturel et l'état $\underline{\underline{S}}_m + \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2}$. Toutefois, comme nous étudions le problème de la fatigue polycyclique, le nombre de cycles N_R est suffisamment élevé (de 10^4 à 10^7), pour pouvoir négliger le terme $\frac{1}{2\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}\left(\|\underline{\underline{S}}_m\| + \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2}\right)$ dans l'équation (II.2.48). Nous obtenons alors une courbe de Wöhler à la nucléation indépendante du déviateur moyen :

$$N_R=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{A}{g}+\frac{B}{h}\right)\mathrm{Ln}\left(\frac{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}-k_{lim}}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{A}{\sqrt{2}g}-1\right)\frac{k_o}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{(II.2.49)}$$

En remplaçant A et B par $c + 2\mu + \sqrt{2}\,g$ et $c + 2\mu - \sqrt{2}\,h$ respectivement, nous obtenons finalement :

$$N_R = \frac{2\mu+c}{4\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) \text{Ln} \left(\frac{\dfrac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) - \frac{1}{g} \frac{k_o}{\dfrac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}} \right] \qquad \text{(II.2.50)}$$

soit encore, en notant p et q les quantités $\dfrac{2\mu + c}{\sqrt{2}\,g}$ et $\dfrac{2\mu + c}{\sqrt{2}\,h}$, nous avons :

$$N_R = \frac{1}{4}(p + q) \text{Ln} \left(\frac{\dfrac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) - \frac{p}{4} \frac{k_o}{\dfrac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{(II.2.51)}$$

Afin d'identifier les paramètres de la courbe de Wöhler à la nucléation (équation II.2.51), nous allons étudier un chargement proportionnel particulier à savoir la torsion alternée. Dans ce cas, la seule composante non nulle du tenseur des contraintes macroscopiques est $\Sigma_{xy}(t) = T_a \sin\omega t$. Par conséquent, $\dfrac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}$ vaut T_a et k_{lim} est égale à la limite d'endurance en torsion alternée i.e. $k_{lim} = t$. L'équation (II.2.51) s'écrit alors :

$$N_R = \frac{1}{4}(p + q)\ \mathrm{Ln}\left(\frac{T_a}{T_a - t}\right) - p\frac{k_o}{4T_a} \qquad \text{(II.2.52)}$$

Si nous utilisons le changement de variables

$$x = T_a\ \mathrm{Ln}\left(\frac{T_a}{T_a - t}\right) \quad ; \quad y = T_a N_R \qquad \text{(II.2.53)}$$

l'équation (II.2.52) devient simplement :

$$y = \frac{1}{4}(p + q)x - \frac{pk_o}{4} \qquad \text{(II.2.54)}$$

Dans le plan (x,y), la courbe de Wöhler que l'on cherche à identifier est une droite de pente $u = \frac{1}{4}(p + q)$ et d'ordonnée à l'origine $v = -p\frac{k_o}{4}$. En reportant les résultats expérimentaux, habituellement disponibles sous la forme de couples $\left(T_a^{(i)}, N_R^{(i)}\right)$, dans le plan (x, y), nous pouvons déterminer les valeurs de u et v par une méthode des moindres carrés par exemple. Remarquons que toute expérience uniaxiale permet, au même titre que la torsion alternée, d'identifier les paramètres u et v et donc d'établir la courbe de Wöhler à la nucléation pour tout chargement multiaxial proportionnel cyclique, alors donnée par :

$$N_R = u\ \mathrm{Ln}\left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}\right) + \frac{v}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{(II.2.55)}$$

L'évaluation de u et v n'est pas suffisante pour identifier séparément les quatre constantes du matériau g, h, c et k_o. Néanmoins, comme l'écrouissage cinématique c est souvent négligeable ($c \simeq 0$) et que la limite d'élasticité initiale du cristal k_o peut être déterminée à partir de mesures micro-métallurgiques, les modules d'écrouissage g et h sont accessibles :

$$g = \frac{\mu}{v}\frac{k_o}{2\sqrt{2}} \quad ; \quad h = \frac{\sqrt{2}\,\mu}{u - \frac{v}{k_o}} \qquad \text{(II.2.56)}$$

Dans ce cas, le comportement élastoplastique du cristal peut être complétement déterminé à partir d'une expérience uniaxiale classique en fatigue polycyclique.

Sur la figure (II.7), nous avons représenté les courbes de Wöhler à la nucléation en flexion et en torsion alternées, obtenues à partir de l'équation générale (II.2.50).Elles présentent bien la même allure que les courbes S-N expérimentales.

Dans l'équation (II.2.50), une simplification supplémentaire consiste à négliger le terme $\frac{1}{g}\,\frac{k_o}{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}$ devant le terme logarithmique, ce qui conduit à l'expression :

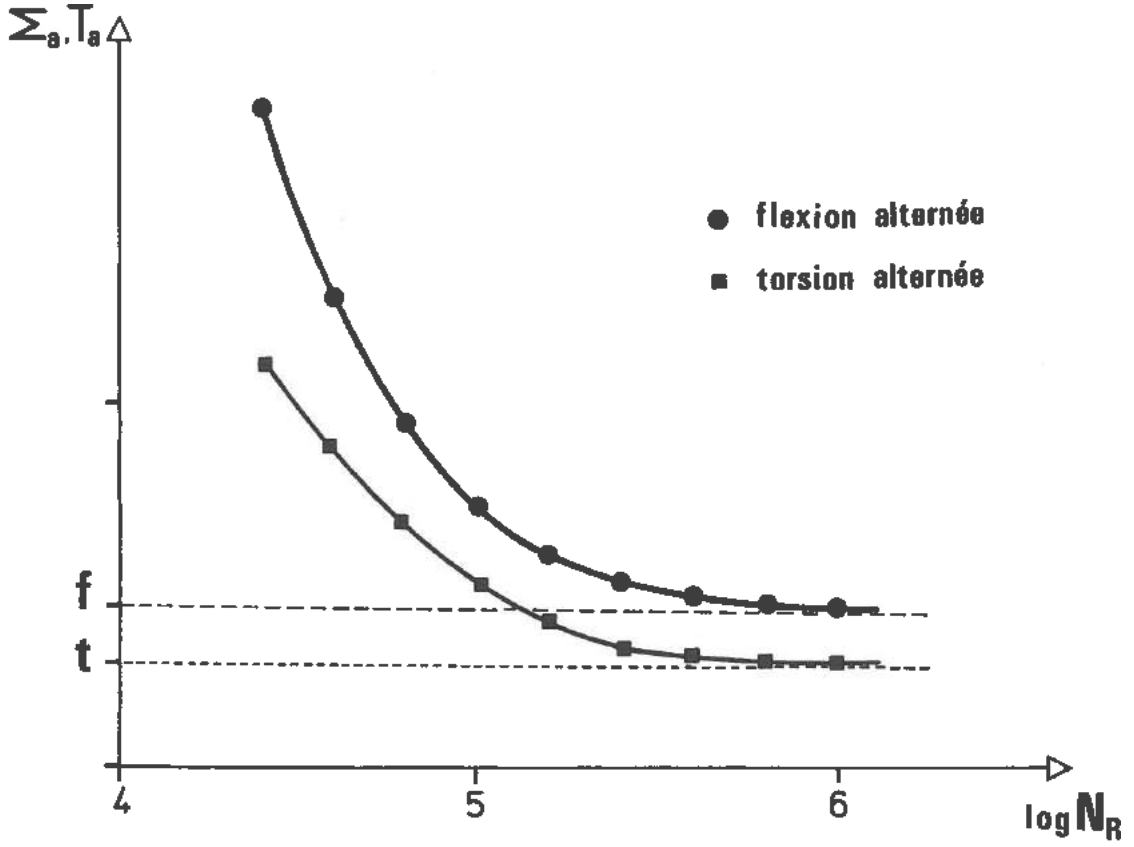


Figure II.7 Courbes de Wöhler à la nucléation.

$$N_R = w \, \mathrm{Ln} \left(\frac{\frac{\| \underline{\underline{\Delta S}} \|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\| \underline{\underline{\Delta S}} \|}{2\sqrt{2}} - k_{1lim}} \right) \qquad \text{(II.2.57)}$$

où

$$w = \frac{2\mu + c}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) \qquad \text{(II.2.58)}$$

Dans le plan $(\tilde{x}, \tilde{y})$ défini par

$$\tilde{x} = \mathrm{Ln}\left(\frac{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}\right) \quad ; \quad \tilde{y} = N_R \qquad \text{(II.2.59)}$$

la courbe d'équation (II.2.57) est une droite linéaire de pente w. A partir de résultats expérimentaux, w pourra être déterminé par la méthode des moindres carrés. Toutefois, l'évaluation de w, même en supposant l'écrouissage cinématique négligeable ($c \simeq 0$), ne nous permet pas d'accéder aux valeurs de g et h mais seulement à la somme $\frac{1}{g} + \frac{1}{h}$. De plus, cette simplification n'est à priori légitime que si $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|$ est suffisamment proche de $2\sqrt{2}\, k_{lim}$, c'est-à-dire lorsque le chargement est au voisinage de la frontière du domaine de non nucléation. Dans ce cas, le terme logarithmique de l'expression (II.2.50) tend vers l'infini alors que le terme $\frac{1}{g}\,\frac{k_o}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}$ reste fini donc négligeable.

Dans le cas général, nous conserverons donc l'expression (II.2.50). Pour obtenir la courbe S-N généralisée à la nucléation il n'est pas nécessaire de connaître explicitement les quatre constantes g, h, c et k_o mais seulement la valeur des deux combinaisons $\frac{c + 2\mu}{g}\, k_o$ et $\frac{c + 2\mu}{g} + \frac{c + 2\mu}{h}$. Dans le paragraphe suivant où nous ferons

le cumul du dommage, nous aurons besoin d'un renseignement supplémentaire puisque les valeurs de $\frac{c + 2\mu}{g}$, $\frac{c + 2\mu}{h}$ et k_o apparaitront alors séparément.

II-3 CUMUL DU DOMMAGE

Dans le cadre de notre étude, le problème du cumul du dommage correspond au calcul du nombre de cycles à la nucléation d'une fissure de fatigue pour une suite donnée de chargements périodiques, le nombre, la nature et le temps d'application de ces chargements étant à priori quelconques. En théorie, nous sommes maintenant en mesure de résoudre un tel problème. En pratique, l'intégration analytique de la loi d'évolution du dommage est rarement possible et un calcul incremental est souvent nécessaire.

Toutefois, à ce jour, le problème du cumul du dommage n'a été étudié que pour des suites de chargements proportionnels et de même nature. Plus précisément, la quasi totalité des résultats expérimentaux actuellement disponibles, concerne le cumul du dommage pour une suite de deux chargements uniaxiaux de même nature et même état moyen. C'est pourquoi nous ne nous intéresserons qu'aux suites de deux chargements cycliques proportionnels, d'autant plus que nous pourrons alors obtenir des solutions analytiques. Nous étudierons d'abord le cas de chargements similaires (généralisation des chargements uniaxiaux de même nature et même état moyen), puis celui de chargements non similaires. Comme précédemment, les indices supérieurs (1) et (2) signaleront respectivement le premier et le second chargement.

II.3.1 SUITE DE DEUX CHARGEMENTS CYCLIQUES PROPORTIONNELS SIMILAIRES

Pour des chargements proportionnels, le concept de similarité se traduit par les équations suivantes (voir aussi § III.4.3, première partie) :

$$\mathcal{P}_m^{(1)} = \mathcal{P}_m^{(2)} \quad \text{et} \quad \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{\mathcal{P}_a^{(1)}} = \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{\mathcal{P}_a^{(2)}} \qquad \text{(II.3.1)}$$

Pour des chargements uniaxiaux de même nature, le système d'équations (II.3.1) indique que les états moyens sont identiques mais que les amplitudes différent (voir Fig. II.8).

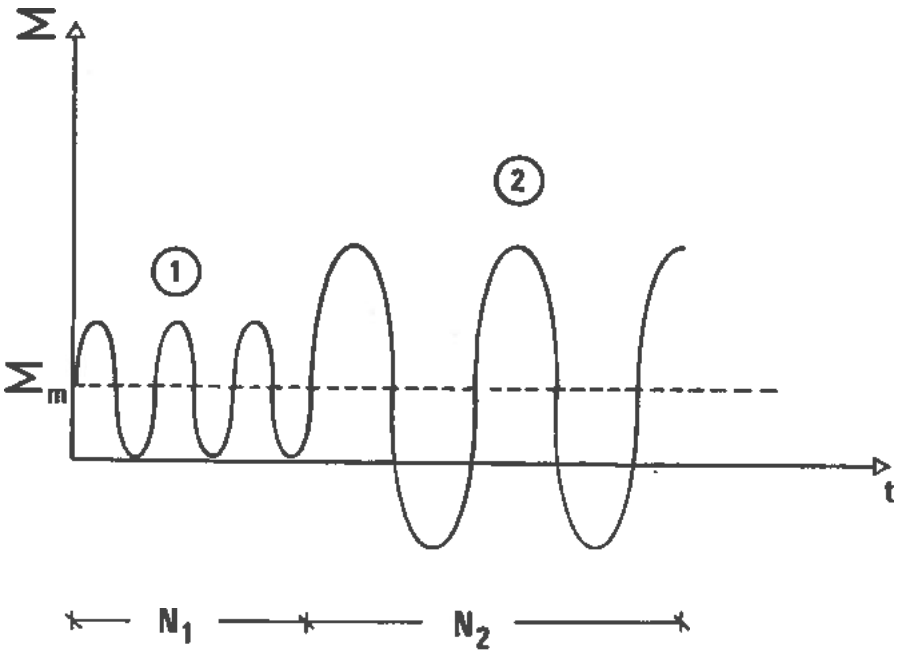


Figure II.8 Suite de deux chargements uniaxiaux de même nature et similaires.

Nous allons tout d'abord examiner le cas d'une suite de deux chargements proportionnels similaires, le premier étant plus faible que le second au sens où $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)} < \|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}$. De plus, nous allons supposer que les deux chargements violent le critère de fatigue du matériau. Si k_{lim} désigne la limite d'endurance, par hypothèse commune aux deux chargements puisque similaires,

$$k_{lim} = \frac{-\alpha\, \mathcal{P}_m^{(i)} + \beta}{\alpha\, \mathcal{P}_a^{(i)} + \dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}} \; \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}} \quad , \; i = 1 \text{ ou } 2 \qquad (II.3.2)$$

nous admettons donc que :

$$\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}} > k_{lim} \quad , \quad i = 1 \text{ ou } 2 \qquad (II.3.3)$$

Cette dernière condition implique, en particulier, qu'il y aura bien nucléation d'une fissure de fatigue après un nombre fini N_R de cycles.

Nous rappelons que la limite d'endurance généralisée k_{lim} est aussi égale à la limite d'élasticité du cristal k_{tr} qui signale la transition entre les phases de durcissement et d'adoucissement :

$$k_{lim} = k_{tr} \qquad (II.3.4)$$

D'autre part, la déformation plastique cumulée (i.e le dommage) vaut $\in^p_{tr}$ à la transition

$$\epsilon^p_{tr} = \frac{k_{tr} - k_o}{g} \qquad \text{(II.3.5)}$$

et ϵ^p_R à la rupture,

$$\epsilon^p_R = \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) k_{tr} - \frac{k_o}{g} \qquad \text{(II.3.6)}$$

Les valeurs de k_{tr}, ϵ^p_{tr} et ϵ^p_R, ainsi que la courbe $k(\epsilon^p)$ d'équation, (voir Fig. II.9)

$$k(\epsilon^p) = \left(k_o + g\epsilon^p\right)\left[1 - H\left(\epsilon^p - \epsilon^p_{tr}\right)\right] + \left[k_{tr} - h\left(\epsilon^p - \epsilon^p_{tr}\right)\right] H\left(\epsilon^p - \epsilon^p_{tr}\right) \qquad \text{(II.3.7)}$$

sont donc communes aux deux chargements puisque caractéristiques de la classe de similarité à laquelle ils appartiennent tous deux.

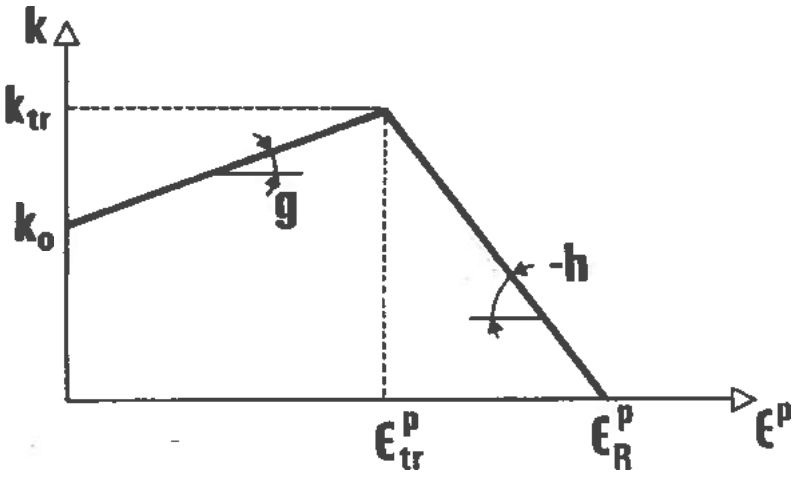


Figure II.9 Courbe $k(\epsilon^p)$ caractéristique de la classe de similarité commune aux deux chargements.

Si le premier chargement (faible) est appliqué durant N_1 cycles, nous désignerons par N_2 le nombre de cycles que doit durer le second chargement (fort) pour qu'il y ait nucléation d'une fissure de fatigue (i.e. rupture du cristal). Le problème du cumul du dommage consiste alors, N_1 étant donné, à déterminer le nombre de cycles $N_R = N_1 + N_2$ à la rupture du cristal. Il suffit donc de calculer N_2. Pour cela, il faut déterminer la limite d'élasticité du cristal $k(N_1)$ à la fin du premier chargement. L'expression de $k(N_1)$ est différente suivant qu'au moment où débute le second chargement, le cristal est encore en phase de durcissement ou déjà en phase d'adoucissement. Pour le savoir, N_1 doit être comparé au nombre de cyle $N_I^{(1)}$ que dure la phase de durcissement du cristal soumis au premier chargement seul, soit :

$$N_I^{(1)} = \frac{A}{4\sqrt{2}\, g} \operatorname{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_I^{(1)}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right) \qquad \text{(II.3.8)}$$

où

$$k_I^{(1)} = k_o + \frac{g}{A} \left(\|\underline{\underline{S}}_m\|^{(1)} + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2} k_o \right) \qquad \text{(II.3.9)}$$

Si N_1 est inférieur à $N_I^{(1)}$, $k(N_1)$ est donné par (voir aussi équation II.1.30)

$$k(N_1) = \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_I^{(1)} \right) \left(1 - \frac{2\sqrt{2} g}{A} \right)^{2N_1} \qquad \text{(II.3.10)}$$

A la fin du premier chargement, le cristal est donc encore en phase de durcissement si bien que, durant le second chargement, le durcissement du cristal se poursuit tout d'abord pendant N_2' cycles. Puis, lorsque la limite d'élasticité du cristal atteint la valeur k_{tr}, la phase d'adoucissement commence et il s'écoule encore N_2'' cycles avant que ne se produise la rupture du cristal. Le nombre de cycles N_2 est donc la somme de N_2' et N_2''. N_2' est le nombre de cycles nécessaires pour que, sous le second chargement, la limite d'élasticité du cristal croisse de $k(N_1)$ à k_{tr}. N_2' est alors donné par une expression analogue à celle de $N_I^{(2)}$ puisque $N_I^{(2)}$, le nombre de cycles que dure la phase de durcissement sous le second chargement seul, est aussi le nombre de cycles nécessaires pour que la limite d'élasticité du cristal croisse de $k_I^{(2)}$ à k_{tr}. En remplaçant donc $k_I^{(2)}$ par $k(N_1)$ dans l'équation (II.2.37), nous obtenons :

$$N_2' = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right) \qquad \text{(II.3.11)}$$

Par ailleurs, N_2'' est le nombre de cycles nécessaire pour que, sous le second chargement, la limite d'élasticité du cristal décroisse de k_{tr} à zéro. N_2'' est donc égal, par définition, au nombre de cycles $N_{II}^{(2)}$ que dure la phase d'adoucissement sous le second chargement seul (voir équation II.2.39) :

$$N_2'' = N_{II}^{(2)} = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{ Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right) \qquad \text{(II.3.12)}$$

Finalement, dans le cas où N_1 est inférieur à $N_I^{(1)}$ nous obtenons $N_R = N_1 + N_2' + N_2''$ soit :

$$N_R = N_1 + \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{ Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right) + \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{ Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right)$$

(II.3.13)

où $k(N_1)$ et $k_{tr} = k_{lim}$ sont donnés par les relations (II.3.10) et (II.3.2) respectivement.

Nous allons maintenant considérer le cas où N_1 est supérieur à $N_I^{(1)}$ mais inférieur à $N_R^{(1)}$ le nombre de cycles, à la rupture du cristal sous le premier chargement seul. La phase de durcissement du cristal s'achève avant la fin du premier chargement, c'est-à-dire après $N_I^{(1)}$ cycles (voir équation II.3.8). Durant les $\left(N_1 - N_I^{(1)}\right)$ derniers cycles du premier chargement, le cristal est en phase d'adoucissement et sa limite d'élasticité décroît jusqu'à la valeur $k(N_1)$ donnée par (voir aussi équation II.1.37) :

$$k(N_1) = \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2\left(N_1 - N_I^{(1)}\right)}$$

(II.3.14)

où $N_I^{(1)}$ est donné par l'équation (II.3.8). Lorsque commence le second chargement le cristal continue en phase d'adoucissement jusqu'à sa rupture. Sous le second chargement, le nombre N_2 de cycles nécessaires pour que la limite d'élasticité du cristal décroisse de $k(N_1)$ à zéro est donné par une expression analogue à celle de $N_{II}^{(2)}$ puisque $N_{II}^{(2)}$ est aussi le nombre de cycles nécessaires pour que la limite d'élasticité du cristal décroisse de k_{tr} à zéro sous le second chargement. En remplaçant k_{tr} par $k(N_1)$ dans l'équation (II.3.12), nous obtenons :

$$N_2 = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{ Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)} \right) \qquad \text{(II.3.15)}$$

Finalement, si N_1 est supérieur à $N_I^{(1)}$, nous obtenons $N_R = N_1 + N_2$ soit :

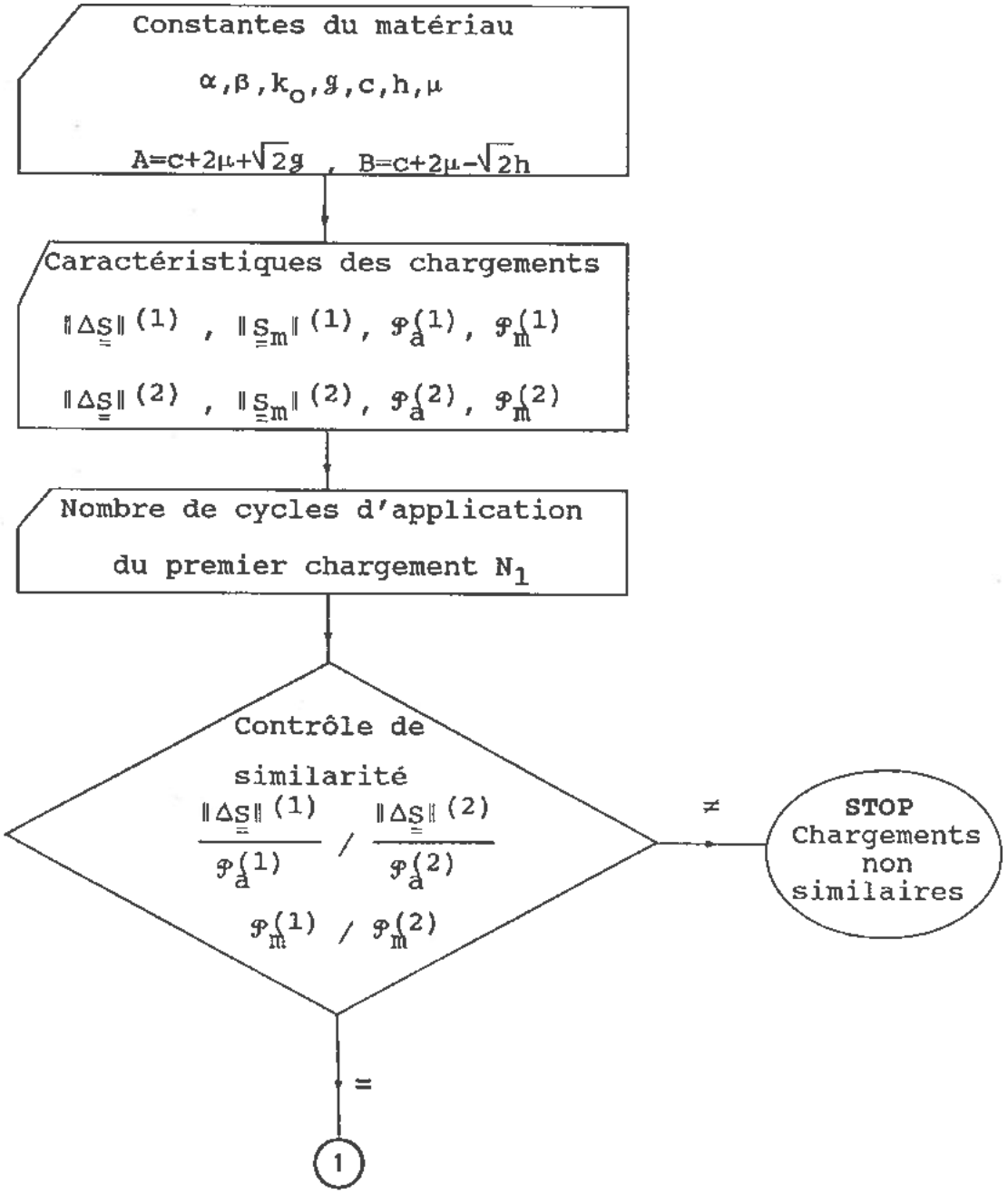
$$N_R = N_1 + \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{ Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)} \right) \qquad \text{(II.3.16)}$$

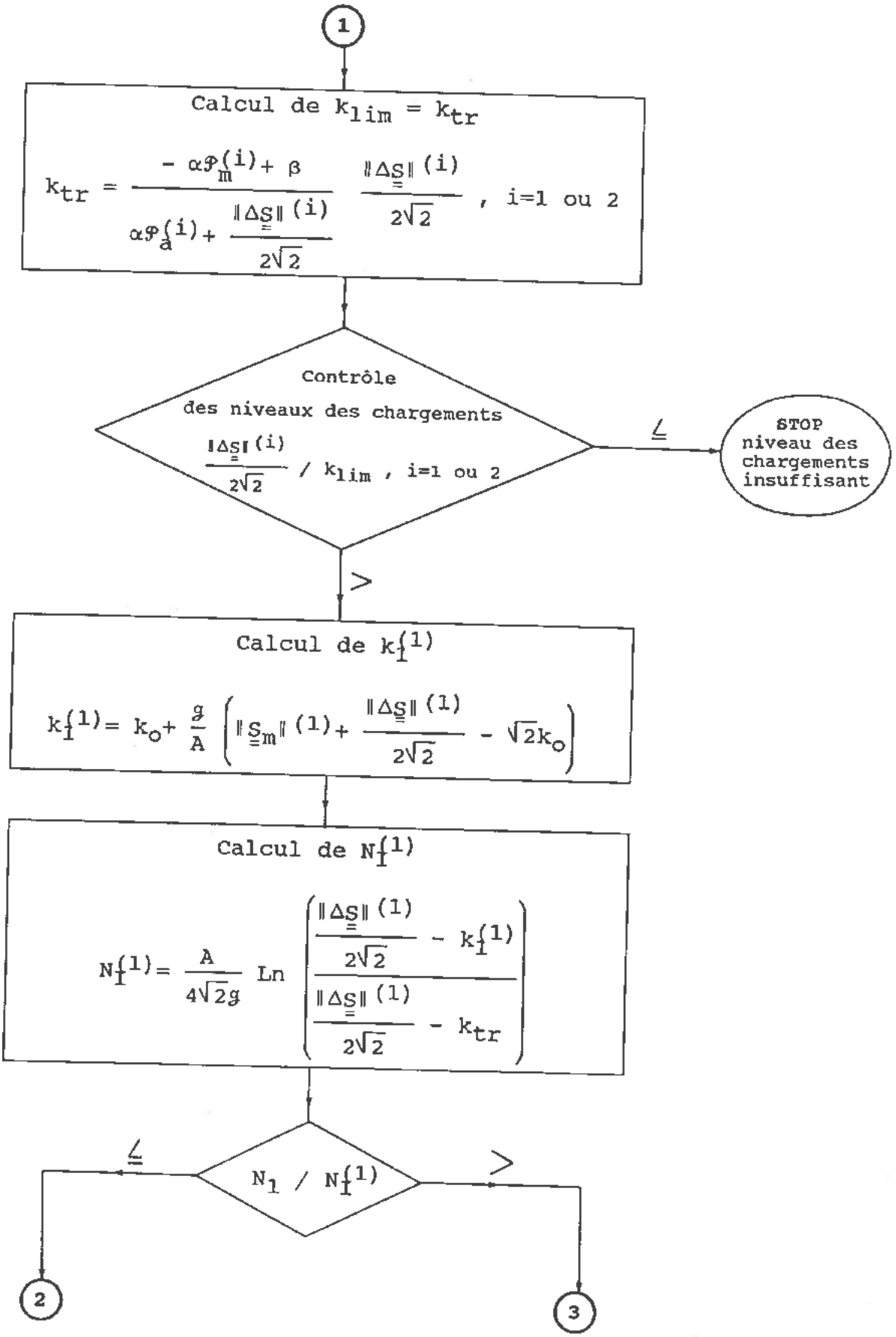
où $k(N_1)$ est donné par l'équation (II.3.14)

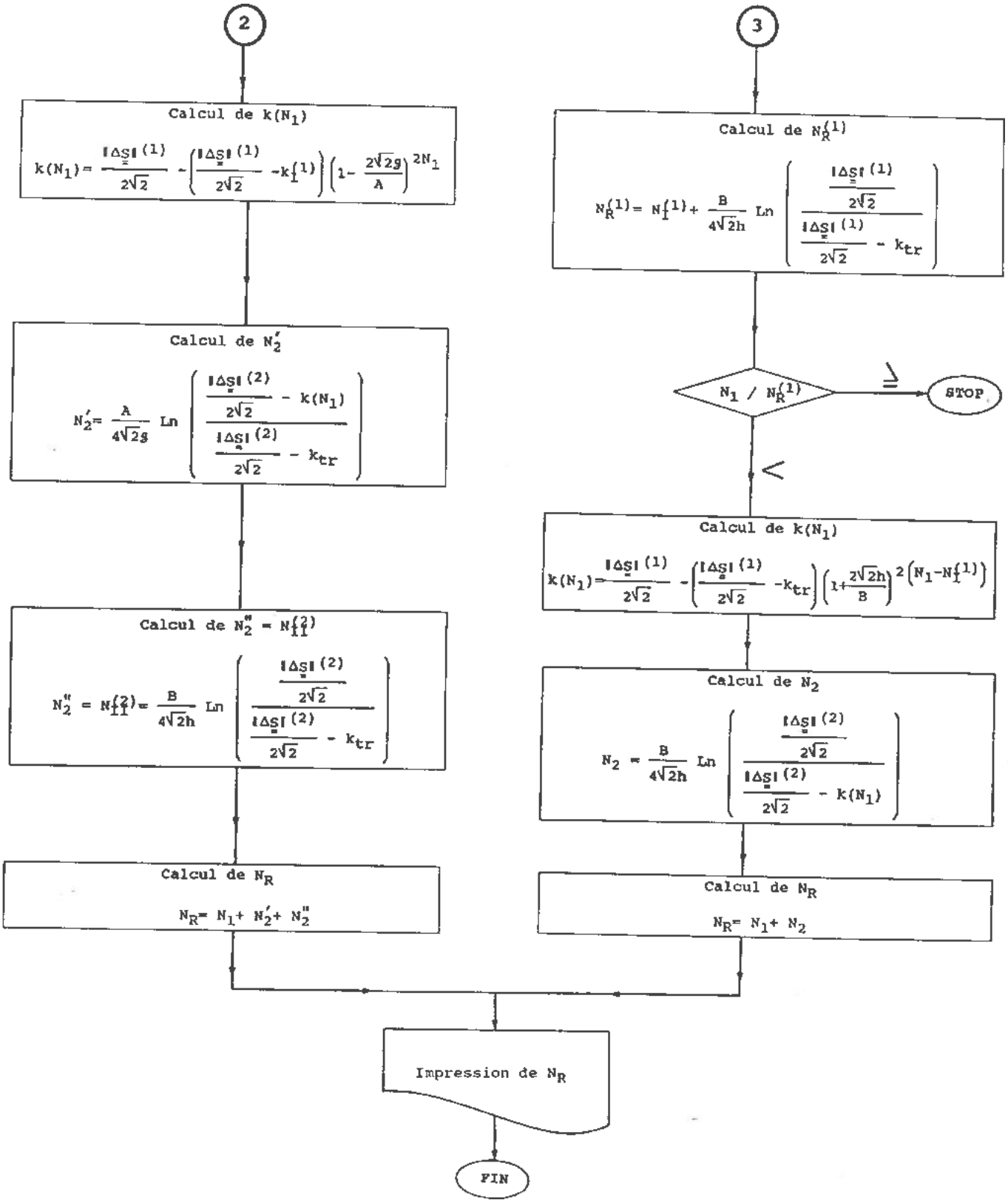
Nous redonnons ci-après, sous forme d'organigramme, l'enchaînement des calculs qui conduisent au nombre N_R à la rupture d'un cristal soumis à une suite de deux chargements proportionnels similaires, le premier étant appliqué durant N_1 cycles.

ORGANIGRAMME II

Calcul du nombre de cycles à la nucléation d'une fissure de fatigue pour une suite de deux chargements périodiques proportionnels similaires




1
Calcul de $k_{lim} = k_{tr}$
$k_{tr} = \frac{-\alpha \mathcal{P}_m^{(i)} + \beta}{\alpha \mathcal{P}_a^{(i)} + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|(i)}{2\sqrt{2}}} \quad \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|(i)}{2\sqrt{2}}$, i=1 ou 2
Contrôle des niveaux des chargements
$\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|(i)}{2\sqrt{2}}$ / k_{lim} , i=1 ou 2
≤
STOP niveau des chargements insuffisant
>
Calcul de $k_I^{(1)}$
$k_I^{(1)} = k_o + \frac{g}{A}\left(\|\underline{\underline{S}}_m\|(1) + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|(1)}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}k_o\right)$
Calcul de $N_I^{(1)}$
$N_I^{(1)} = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|(1)}{2\sqrt{2}} - k_I^{(1)}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|(1)}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right)$
≤
N_1 / $N_I^{(1)}$
>
2
3


2
Calcul de k(N1)
k(N1)= |ΔS|(1)/2√2 - (|ΔS|(1)/2√2 - k1(1)) (1 - 2√2g/A)^2N1
Calcul de N2'
N2' = A/4√2g Ln ((|ΔS|(2)/2√2 - k(N1)) / (|ΔS|(2)/2√2 - ktr))
Calcul de N2'' = N11(2)
N2'' = N11(2) = B/4√2h Ln ((|ΔS|(2)/2√2) / (|ΔS|(2)/2√2 - ktr))
Calcul de NR
NR= N1+ N2'+ N2''
3
Calcul de NR(1)
NR(1)= N1(1)+ B/4√2h Ln ((|ΔS|(1)/2√2) / (|ΔS|(1)/2√2 - ktr))
N1 / NR(1)
≥
STOP
<
Calcul de k(N1)
k(N1)= |ΔS|(1)/2√2 - (|ΔS|(1)/2√2 - ktr) (1 + 2√2h/B)^2(N1-N1(1))
Calcul de N2
N2 = B/4√2h Ln ((|ΔS|(2)/2√2) / (|ΔS|(2)/2√2 - k(N1)))
Calcul de NR
NR= N1+ N2
Impression de NR
FIN

A titre d'illustration, nous allons traiter un exemple numérique. Les constantes du matériau sont arbitrairement choisies de la manière suivante :

α = 0,25
β = 150 MPa
k_o = 5 MPa
g = 150 MPa
h = 30 MPa
c = 0
μ = 70.000 MPa

La suite de chargements considérée est composée de deux torsions alternées d'amplitudes respectives $T_a^{(1)}$ = 160 MPa et $T_a^{(2)}$ = 200 MPa. Dans ce cas, nous avons :

$$\mathcal{P}_a^{(i)} = \mathcal{P}_m^{(i)} = \|\underline{\underline{S}}_m\|^{(i)} = 0 \text{ et } \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}} = T_a^{(i)}, \; i = 1,2 \; .$$

Les résultats relatifs au cumul du dommage à deux niveaux de charge sont habituellement représentés dans un diagramme de fractions de vie. Si, lors d'un essai, le nombre de cycles N_R à la rupture se compose de N_1 cycles du premier chargement et N_2 cycles du second chargement, l'essai est représenté dans ce diagramme par un point d'abscisse $\frac{N_1}{N_R^{(1)}}$ et d'ordonnée $\frac{N_2}{N_R^{(2)}}$, $N_R^{(1)}$ (resp. $N_R^{(2)}$) étant le nombre de cycles à la rupture sous l'action du premier (resp. second) chargement seul. Lorsque le nombre de cycles d'application du premier chargement N_1 varie continûment de 0 à $N_R^{(1)}$, N_2 varie continûment de $N_R^{(2)}$ à 0. Dans le diagramme de fractions de vie, nous obtenons alors une courbe d'extrémités les points (0,1) et (1,0). Lorsque le

cumul du dommage suit une règle linéaire (règle de Miner par exemple), cette courbe est une droite appelée droite du cumul linéaire (segment [(0,1), (1,0)] sur la figure II.10). Si ce n'est pas le cas, la courbe de fractions de vie peut s'écarter considérablement de la droite du cumul linéaire. C'est ce que nous observons sur la figure (II.10) où est représenté la courbe de fractions de vie pour l'exemple numérique choisi.

Il est intéressant de remarquer que cette courbe possède un point d'inflexion $\left(\frac{N_I^{(1)}}{N_R^{(1)}}, \frac{N_{II}^{(2)}}{N_R^{(2)}}\right)$ sur la droite du cumul linéaire. Après ce point, c'est-à-dire pour $N_1 > N_I^{(1)}$, la courbe de fractions de vie est au-dessus de la droite du cumul linéaire. Ceci signifie que la succession des deux chargements a un effet bénéfique sur la durée de vie $\left(\text{i.e. } \frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} > 1\right)$ si le premier chargement (faible) est appliqué durant plus de $N_I^{(1)}$ cycles, c'est-à-dire suffisamment longtemps pour que le cristal entre en phase d'adoucissement. Cette propriété est bien confirmée par la plupart des résultats expérimentaux relatifs au cumul du dommage pour des essais à deux niveaux [1]. En revanche, avant le point d'inflexion, c'est-à-dire pour $N_1 < N_I^{(1)}$, la courbe de fraction de vie est au-dessous de la droite du cumul linéaire. La même succession de chargements est donc préjudiciable à la durée de vie $\left(\text{i.e. } \frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} < 1\right)$ si le premier chargement (faible) est appliqué durant moins de $N_I^{(1)}$ cycles. Bien que cette propriété n'ait pas été observée expérimentalement, elle est reproduite par d'autres modèles d'endommagement (voir par exemple Cordier [2]).

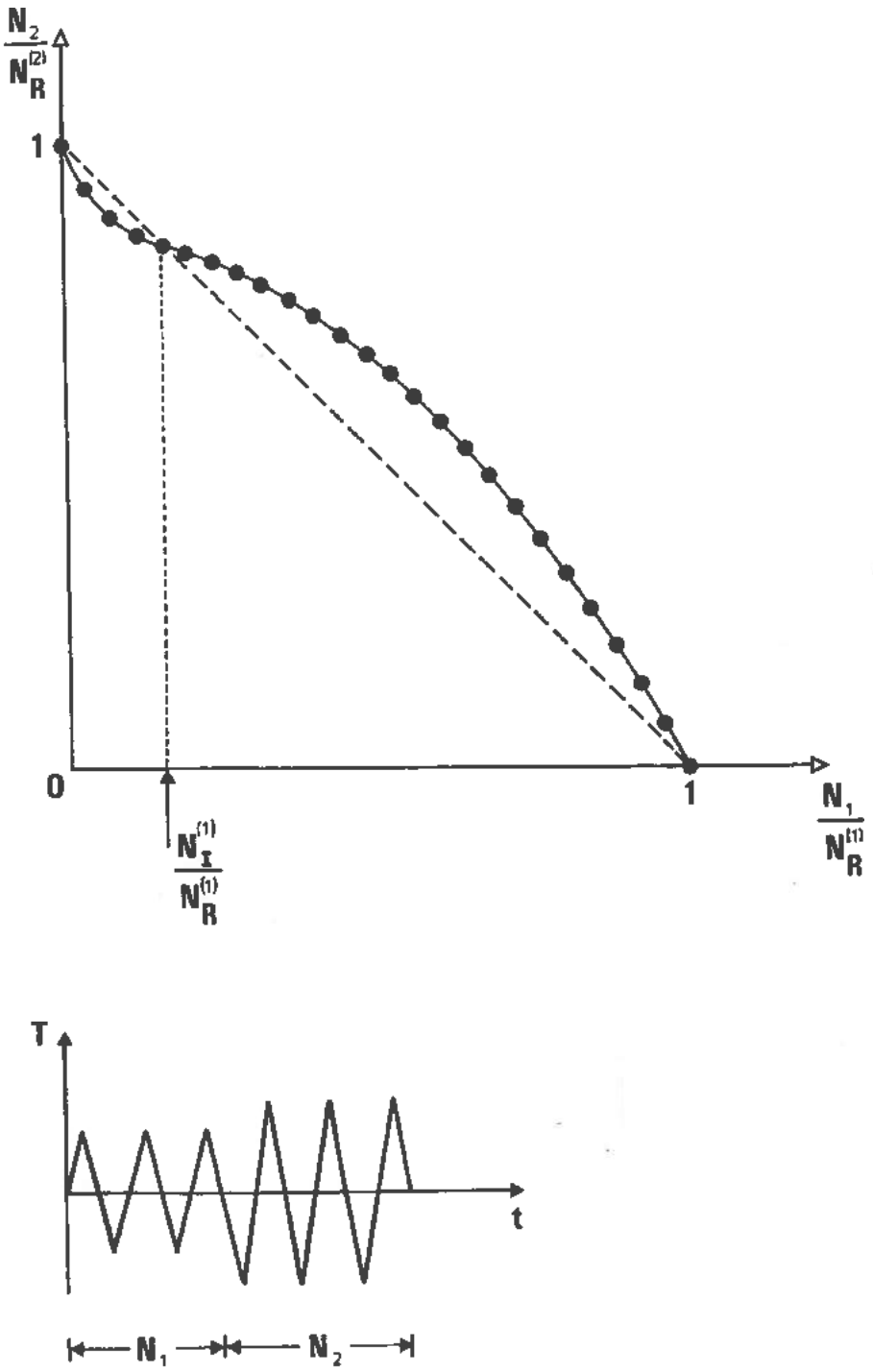


Figure II.10 Diagramme des fractions de vie pour une suite de deux torsions alternées (chargement faible d'abord).

Le caractère non linéaire du cumul du dommage obtenu par le modèle que nous proposons peut aussi être mis en évidence sur les courbes de dommage normalisées qui donnent $\frac{D(N)}{D_R}$ en fonction de $\frac{N}{N_R}$ (Fig. II.11).

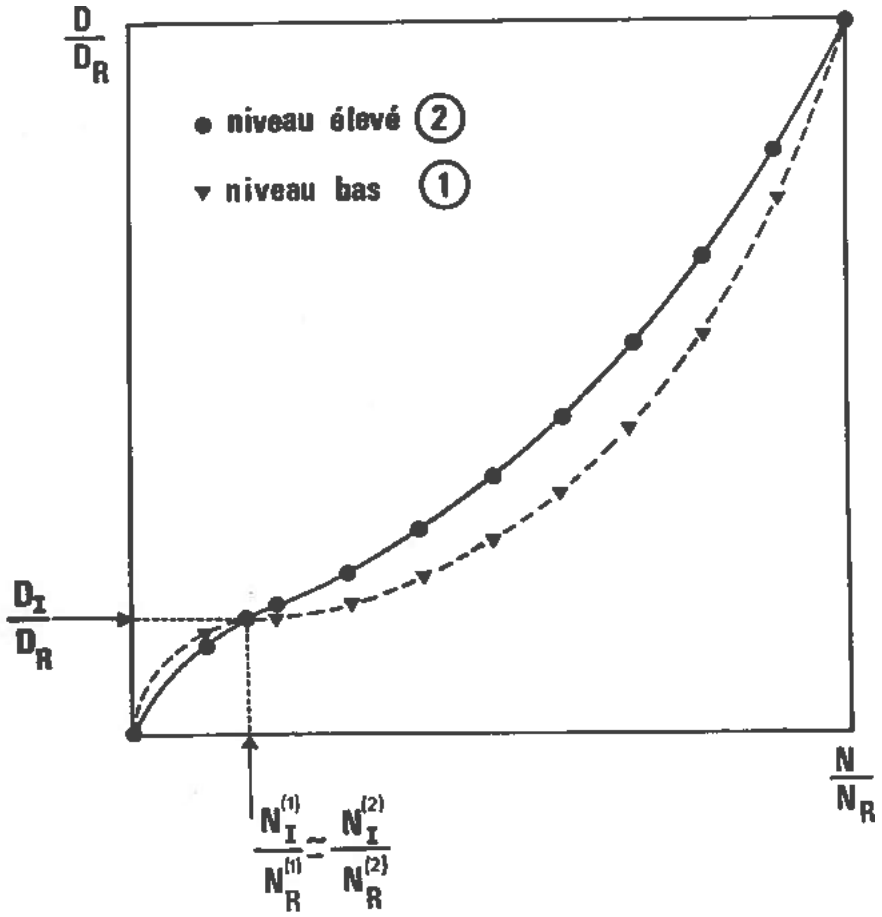


Figure II.11 Courbes de dommage normalisées pour deux chargements similaires.

Nous avons déjà signalé que, dans le cadre de notre approche, une telle normalisation n'est légitime que dans le cas où le dommage à la rupture D_R $\left(\text{i.e. } \in_R^p\right)$ est le même pour tous les chargements de la suite considérée. Cette propriété est bien vérifiée par la suite de deux chargements proportionnels similaires étudiée dans ce paragraphe.

Sur la figure II.11, nous avons donc représenté les courbes de dommage normalisées associées aux deux torsions alternées de l'exemple numérique choisi. Puisqu'il s'agit de chargements similaires, le rapport $\frac{D_I}{D_R}$ $\left(\text{i.e. } \frac{\in_I^p}{\in_R^p}\right)$ est commun aux deux chargements. En revanche, les rapports correspondants $\frac{N_I^{(i)}}{N_R^{(i)}}$ donnés par, l'équation (II.3.17) suivante diffèrent.

$$\frac{N_I^{(i)}}{N_R^{(i)}} = \frac{\dfrac{A}{4\sqrt{2}g}\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}} - k_I^{(i)}}{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}}\right)}{\dfrac{A}{4\sqrt{2}g}\mathrm{Ln}\left(\dfrac{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}-k_I^{(i)}}{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}-k_{tr}}\right)+\dfrac{B}{4\sqrt{2}h}\mathrm{Ln}\left(\dfrac{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}-k_{tr}}\right)}\quad , \; i=1,2$$

(II.3.17)

Néanmoins, $k_I^{(i)}$ étant négligeable devant $\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}$ l'équation (II.3.17) devient :

$$\frac{N_I^{(i)}}{N_R^{(i)}} \simeq \frac{\frac{A}{g}}{\frac{A}{g} + \frac{B}{h}} \qquad \text{(II.3.18)}$$

Les courbes de dommage normalisées d'un ensemble de chargements similaires admettent donc un point commun autre que (1,0) et (0,1) à savoir $\left(\frac{\frac{A}{g}}{\frac{A}{g} + \frac{B}{h}} , \frac{D_I}{D_R} \right)$. Il s'agit aussi d'un point d'inflexion, les courbes de dommages étant d'abord concaves puis convexes. Ce point correspond à la transition entre les phases de durcissement et d'adoucissement.

Dans le cas de deux chargements similaires, la courbe des fractions de vie peut être directement obtenue à partir des courbes de dommage normalisées. Pour un nombre N_1 de cycles d'application du premier chargement (faible), la courbe de dommage normalisée correspondante associe, à la fraction de vie $\frac{N_1}{N_R^{(1)}}$, le dommage normalisé induit $\frac{D}{D_R}$. Pour cette même valeur $\frac{D}{D_R}$, la courbe de dommage normalisée du second chargement (fort) donne la fraction de vie $\frac{\tilde{N}_2}{N_R^{(2)}}$ associée au nombre $\tilde{N}_2$ de cycles d'application du second chargement qui aurait induit le même dommage (Fig. II.11).

La fraction de vie restante $\frac{N_2}{N_R^{(2)}}$ est donc simplement égale à $1 - \frac{\tilde{N}_2}{N_R^{(2)}}$ (voir Fig. II.11) et le point $\left(\frac{N_1}{N_R^{(1)}}, \frac{N_2}{N_R^{(2)}}\right)$ appartient à la courbe des fractions de vie. Les courbes de dommage normalisées permettent ainsi de savoir immédiatement si une succession de deux chargements similaires a un effet bénéfique ou préjudiciable sur la durée de vie. Si la courbe de dommage normalisée du premier chargement se trouve au-dessous de celle du second, la durée de vie est augmentée. Dans le cas contraire, elle est diminuée. La figure II.11 nous conduit donc à la même conclusion que la figure II.10 : pour qu'une suite de deux chargements cycliques proportionnels similaires, le premier étant plus faible que le second, ait un effet bénéfique sur la durée de vie à la nucléation d'une fissure, il faut que le cristal soit déjà en phase d'adoucissement à la fin du premier chargement (faible).

L'étude du cas où le chargement fort précède le chargement faible $\left(\|\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}\|^{(1)} > \|\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}\|^{(2)} \right)$ peut être menée de manière analogue. En particulier, l'organigramme II établi pour $\|\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}\|^{(1)} < \|\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}\|^{(2)}$ est également valable pour $\|\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}\|^{(1)} > \|\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}\|^{(2)}$ puisque les calculs effectués ne dépendent pas de l'ordre des amplitudes. La seule différence est que l'indice (1) désigne maintenant le chargement fort. La figure II.12 représente le diagramme des fractions de vie pour l'exemple numérique déjà cité précédemment où maintenant l'ordre d'application des deux chargements est inversé. La plus forte de deux torsions alternées s'applique en premier.

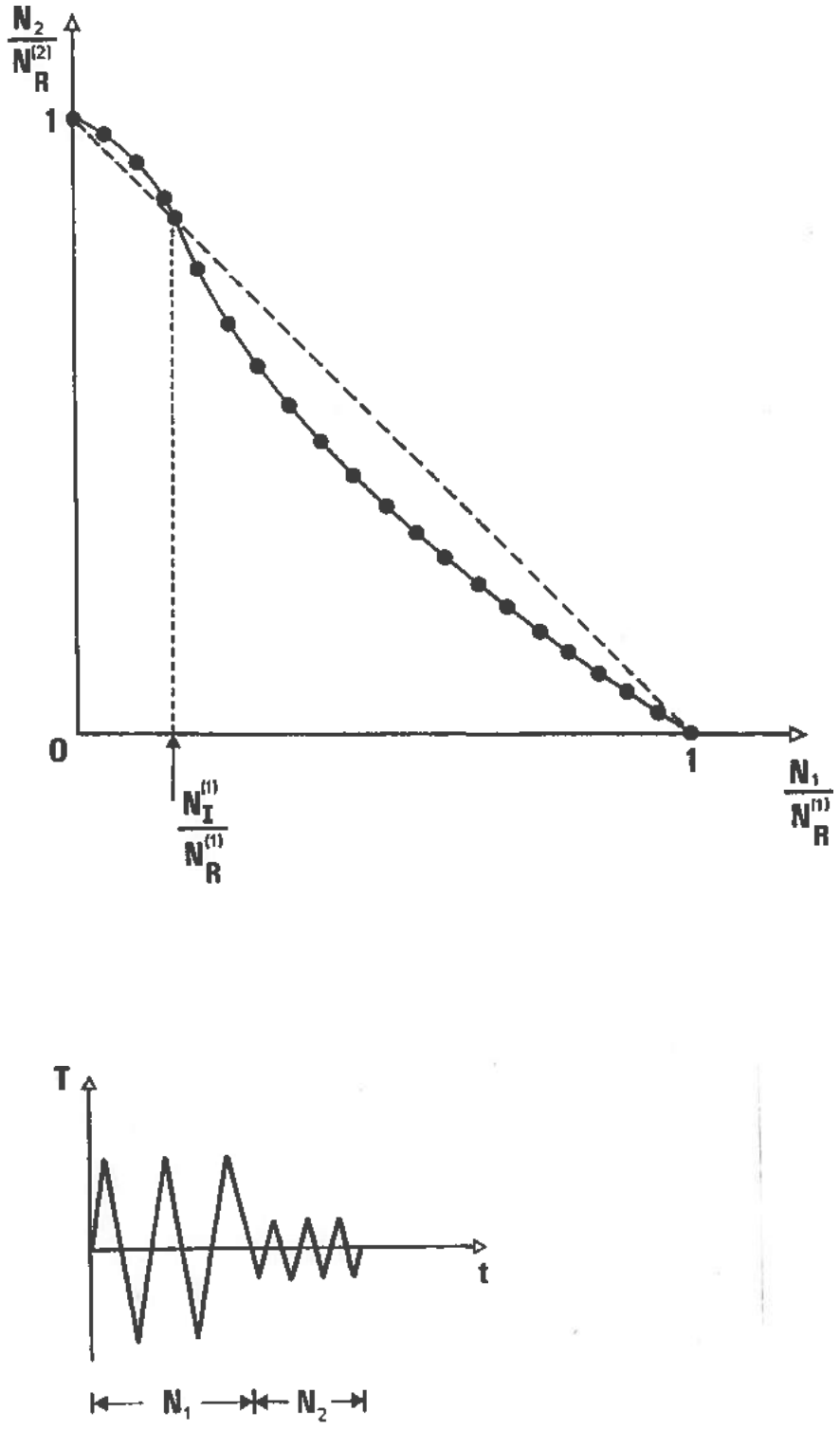


Figure II.12 Diagramme des fractions de vie pour une suite de deux torsions alternées (torsion forte d'abord).

Ce diagramme peut être également construit à partir des deux courbes de dommage normalisées qui sont les mêmes que précédemment (Fig. II.11) puisque les chargements n'ont pas changé. En revanche, la construction graphique n'est plus la même puisque l'ordre des chargements est inversé. L'influence d'une suite de deux chargements similaires (fort-faible) sur la durée de vie est exactement l'inverse de celle qui avait été trouvée dans le cas précédent (faible-fort) : pour qu'elle soit bénéfique, il faut que le cristal soit encore en phase de durcissement à la fin du premier chargement (fort). Si cette propriété n'est pas vérifiée expérimentalement, la propriété complémentaire l'est : les expériences montrent bien que la succession de deux chargements similaires (fort-faible) diminue la durée de vie si le cristal est déjà en phase d'adoucissement au début du second chargement (faible).

Avant de terminer ce paragraphe, il est important de signaler que l'ensemble des résultats expérimentaux disponibles sur le cumul du dommage concerne la rupture de l'éprouvette et non la nucléation d'une microfissure de fatigue. Par conséquent, la comparaison des résultats expérimentaux et des prédictions données par le modèle proposé ne peut être que qualitative et, en tout état de cause, ne saurait être décisive en ce qui concerne la validité du présent modèle.

II.3.2 IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE PROPOSE A PARTIR D'UN ESSAI DE CUMUL DU DOMMAGE

Dans le paragraphe II.2.5, nous avons vu que la courbe de Wöhler généralisée ne dépendait que des deux coëfficients $\left(\frac{c+2\mu}{g} + \frac{c+2\mu}{h}\right)$ et $\frac{c+2\mu}{g}\, k_o$ et nous avons ensuite indiqué la manière dont ces coëfficients pouvaient être identifiés à partir d'une seule courbe S-N expérimentale relative à un chargement uniaxial.

Pour résoudre le problème du cumul du dommage, la connaissance de ces deux coëfficients n'est plus suffisante puisque les quantités $\frac{c+2\mu}{g}$, $\frac{c+2\mu}{h}$ et k_o interviennent séparément dans les équations (voir § II.3.1). Un renseignement supplémentaire c'est-à-dire l'identification de l'une de ces trois constantes est alors nécessaire.

L'objet de ce paragraphe est précisément de montrer comment, à partir d'un essai particulier de cumul du dommage, il est possible d'identifier, de manière approximative, le coëfficent $\frac{c+2\mu}{h}$.

Nous considérons une suite de deux chargements proportionnels similaires composée d'un premier chargement à la limite du critère de fatigue $\left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} = k_{lim}\right)$ et d'un second violant ce même critère $\left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} > k_{lim}\right)$. A la fin du premier chargement, le cristal est toujours en phase de durcissement, quel que soit le nombre N_1 de cycles effec-

tués et sa limite d'élasticité vaut alors :

$$k(N_1) = \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_1^{(1)}\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N_1} \qquad \text{(II.3.19)}$$

ou encore, puisque $\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} = k_{lim}$,

$$k(N_1) = k_{lim} - \left(k_{lim} - k_1^{(1)}\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N_1} \qquad \text{(II.3.20)}$$

Lorsque N_1 tend vers l'infini, nous obtenons alors :

$$\lim_{N_1 \to +\infty} k(N_1) = k_{lim} \qquad \text{(II.3.21)}$$

Supposons alors que N_1, le nombre de cycles d'application du premier chargement soit suffisamment grand (10^6 à 10^7 cycles) pour qu'à la fin, la limite d'élasticité du cristal $k(N_1)$ soit pratiquement égale à la limite d'endurance k_{lim} :

$$k(N_1) \simeq k_{lim} \quad , \quad N_1 = 10^6 \div 10^7 \text{ cycles} \qquad \text{(II.3.22)}$$

Le second chargement est plus fort que le premier au sens où $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)} > \|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}$ mais il lui est similaire si bien que nous pouvons utiliser les résultats du cumul du dommage relatifs à une suite de deux chargements similaires (voir § II.3.1). Nous savons que le nombre N_2 de cycles qui peut être appliqué au second chargement avant la rupture du cristal se divise en deux parties N_2' et N_2''. N_2', le nombre de cycles écoulés alors que le cristal achève sa phase de durcissement, est donné par l'équation (II.3.11) qui, grâce à la relation (II.3.22) conduit à

$$N_2' \simeq 0 \qquad \text{(II.3.23)}$$

N_2'', le nombre de cycles écoulés pendant la phase d'adoucissement du cristal, est donné par l'équation (II.3.12). Ainsi, N_2 est donné par,

$$N_2 \simeq N_2' = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) \qquad \text{(II.3.24)}$$

soit en remplaçant B par $c + 2\mu - \sqrt{2}h$:

$$N_2 \simeq \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{c + 2\mu}{h} - \sqrt{2} \right) \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) \qquad \text{(II.3.25)}$$

En mesurant le nombre N_2 de cycles écoulés sous le second chargement avant la nucléation d'une fissure, il est possible de calculer le coëfficient $\frac{c+2\mu}{h}$ qui est la seule inconnue de l'équation (II.3.25).

Finalement, pour identifier les trois coëfficents $\frac{c+2\mu}{g}$, $\frac{c+2\mu}{h}$ et k_o, il suffit de connaître une seule courbe S-N expérimentale et d'effectuer un essai particulier de cumul du dommage.

II.3.3 CUMUL DU DOMMAGE POUR UNE SUITE DES DEUX CHARGEMENTS NON SIMILAIRES

Le problème du cumul du dommage dans le cas de chargements non similaires est relativement complexe. Remarquons tout d'abord que nous ne pouvons plus utiliser les courbes de dommage normalisées puisque la déformation plastique cumulée à la rupture est à priori différente pour chaque chargement. La construction graphique du diagramme des fractions de vie étant exclue, nous aurons recours à un calcul analytique complet. D'autre part, nous insistons sur le fait que c'est la déformation plastique cumulée et non la limite d'élasticité, qui signale la transition entre les phases de durcissement et d'adoucissement. En revanche, c'est bien l'annulation de la limite d'élasticité qui signale la rupture du cristal. Dans le cas d'une suite de deux chargements similaires (§ II.3.1), cette distinction est inutile puisque, les courbes $k(\in^p)$ étant confondues les valeurs de la limite d'élasticité et de la déformation plastique cumulée sont reliées par l'équation de la courbe $k(\in^p)$ commune à tout instant de la suite de deux chargements. C'est pourquoi il était licite de raisonner sur la seule limite d'élasticité. Nous allons voir que ce n'est plus possible dans le cas de deux chargements non similaires.

Soit alors deux chargements proportionnels cycliques non similaires définis par la donnée de $\Delta\underline{\underline{S}}^{(i)}$, $\underline{\underline{S}}_m^{(i)}$, $\mathcal{P}_a^{(i)}$ et $\mathcal{P}_m^{(i)}$ pour i = 1 ou 2. A chacun d'eux correspond une limite d'endurance généralisée $k_{lim}^{(i)}$ qui est aussi la valeur

de la limite d'élasticité de transition $k_{tr}^{(i)}$ sous le chargement correspondant :

$$k_{lim}^{(i)} = k_{tr}^{(i)} = \frac{-\alpha \mathcal{P}_m^{(i)} + \beta}{\alpha \mathcal{P}_a^{(i)} + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}} \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}} \quad , \; i = 1 \text{ ou } 2 \qquad \text{(II.3.26)}$$

Par la suite, nous supposerons que les inégalités

$$\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}} > k_{lim}^{(i)} \quad , \; i = 1 \text{ ou } 2 \qquad \text{(II.3.27)}$$

sont vérifiées, de manière à ce que la nucléation d'une fissure de fatigue soit assurée durant la suite des deux chargements. Les valeurs de la déformation plastique à la transition $\in_{tr}^{p(i)}$ et à la rupture $\in_{R}^{p(i)}$ données par :

$$\in_{tr}^{p(i)} = \frac{k_{lim}^{(i)} - k_o}{g} \quad , \quad \in_{R}^{p(i)} = \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) k_{lim}^{(i)} - \frac{k_o}{g} \quad , \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

(II.3.28)

sont caractéristiques de la classe de similarité de chacun des chargements. Il en est de même pour les courbes $k(\in^p)$ représentées sur la figure II.13.

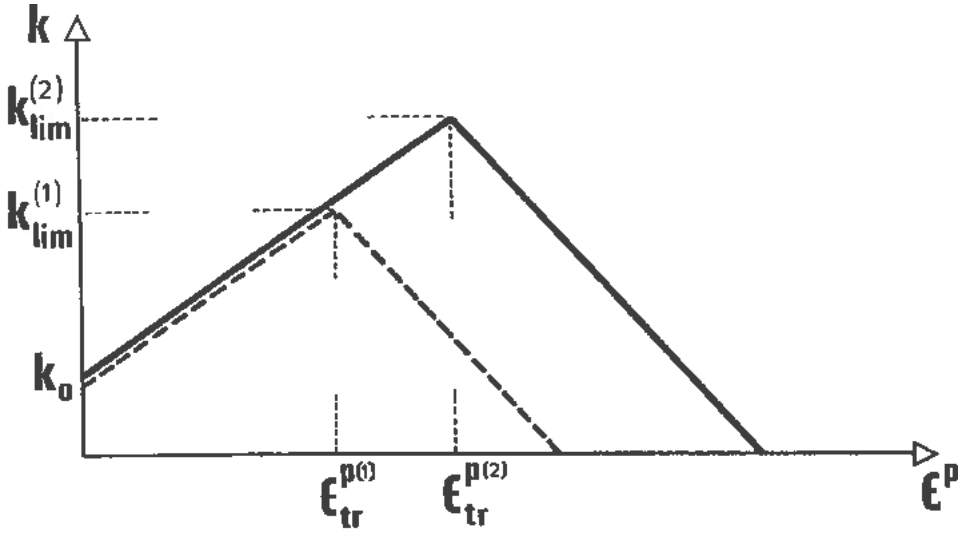


Figure II.13 Courbes $k(\epsilon^p)$ pour les deux chargements non similaires.

Cette figure indique clairement que la position relative des deux limites d'endurance généralisées sera décisive.

Nous allons d'abord étudier le cas où le premier chargement (indice 1) possède la plus faible des deux limites d'endurance :

$$k_{lim}^{(1)} < k_{lim}^{(2)} \qquad \text{(II.3.29)}$$

Il en résulte immédiatement les inégalités suivantes :

$$\epsilon_{tr}^{p(1)} < \epsilon_{tr}^{p(2)} \quad \text{et} \quad \epsilon_R^{p(1)} < \epsilon_R^{p(2)} \qquad \text{(II.3.30)}$$

Suivant la valeur $\epsilon^p(N_1)$ atteinte par la déformation plastique cumulée à la fin des N_1 cycles du premier chargement, l'enchaînement des calculs est différent. Les trois configurations possibles peuvent être représentées dans le plan (ϵ^p, k) par une courbe donnant l'évolution de la limite

d'élasticité du cristal en fonction de la déformation plastique cumulée au cours de la suite des deux chargements (Fig. II.14). Cette courbe coïncide donc avec la courbe $k(\in^p)$ du premier chargement jusqu'à la valeur $\in^p(N_1)$ mais, suivant la position du point atteint, elle suit ensuite des chemins différents que nous allons déterminer. Mais auparavant, nous donnons un certain nombre de relations préliminaires qui nous seront utiles tout au long des calculs. La première concerne le nombre N de cycles nécessaires pour que, sous un chargement proportionnel de variation $\Delta\underline{\underline{S}}$, et de limite d'endurance k_{lim}, la limite d'élasticité du cristal croisse de la valeur k_{inf} à la valeur k_{sup}, où nous avons $k_{inf} < k_{sup} < \min\left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} ; k_{lim}\right)$, les lois d'écrouissage étant celles de la phase de durcissement :

$$N = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \operatorname{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{inf}}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{sup}} \right) \qquad \text{(II.3.31)}$$

Inversement, pour que, sous le même chargement mais dans la phase d'adoucissement, la limite d'élasticité diminue d'une valeur k_{sup} à une valeur k_{inf}, le nombre de cycles nécessaires est :

$$N = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \operatorname{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{inf}}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{sup}} \right) \qquad \text{(II.3.32)}$$

Remarquons que l'expression du nombre de cycles N_I (resp. N_{II}) que dure la phase de durcissement (resp. adoucissement) est un cas particulier de l'équation (II.3.31) (resp. (II.3.32)) obtenu pour les valeurs particulières $k_{inf} = k_1$ (resp. $k_{inf} = 0$) et $k_{sup} = k_{lim}$ (voir § II.2.4), équations (II.2.37) et (II.2.39)). Enfin, nous rappelons que la variation de la limite d'élasticité du cristal est toujours proportionnelle à la variation de la déformation plastique cumulée, le facteur de proportionnalité étant g en phase de durcissement et $-h$ en phase d'adoucissement (i.e. $\delta k = g\delta\epsilon^p$ durcissement, $\delta k = -h\delta\epsilon^p$ adoucissement).

La première configuration est celle où le premier chargement est interrompu durant la phase de durcissement du cristal. Si $N_I^{(1)}$ est le nombre de cycles que dure la phase de durcissement sous le premier chargement seul, nous avons alors :

$$N_1 \leqslant N_I^{(1)}$$

ou, ce qui est équivalent, (voir Fig. II.14.a)

$$\epsilon^p(N_1) \leqslant \epsilon^{p(1)}_{tr} \qquad \text{(II.3.33)}$$

A la fin du premier chargement la limite d'élasticité du cristal vaut

$$k(N_1) = \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_I^{(1)}\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N_1} \qquad \text{(II.3.34)}$$

et sa déformation plastique cumulée

$$\epsilon^p(N_1) = \frac{1}{g}\,(k(N_1) - k_o) \qquad \text{(II.3.35)}$$

avec

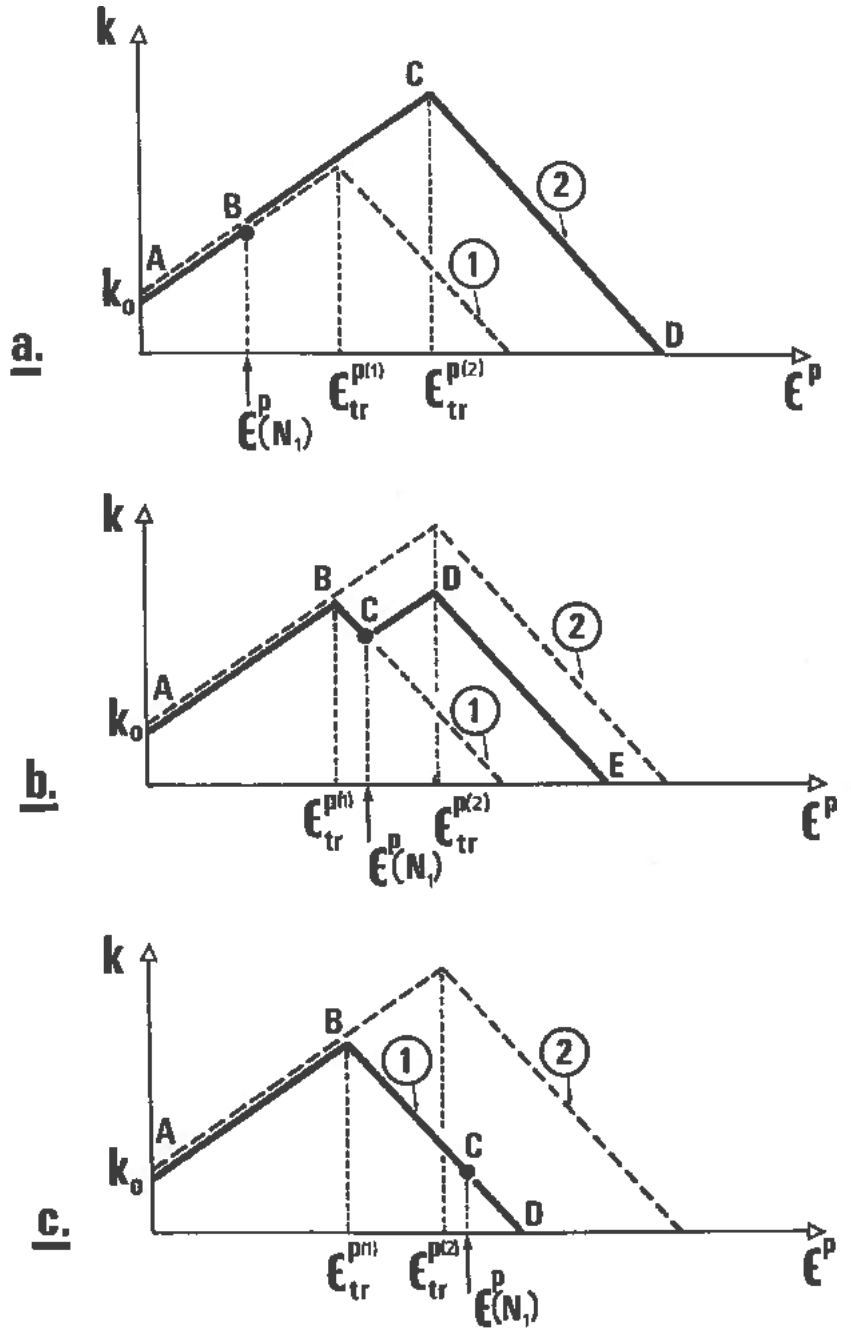


Figure II.14 Evolutions possibles de la limite d'élasticité k en fonction de la déformation plastique cumulée ϵ^p, au cours d'une suite des deux chargements non similaires $\left(k^{(1)}_{lim} < k^{(2)}_{lim}\right)$

$$k_1^{(1)} = k_o + \frac{g}{A}\left(\|\underline{\underline{S}}m\|^{(1)} + \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}k_o \right) \qquad (II.3.36)$$

Le point $\left(\epsilon^p(N_1)\ ,\ k(N_1)\right)$, (noté B sur la figure II.10.a) appartient à la partie ascendante commune aux deux courbes $k(\epsilon^p)$ des deux chargements. Durant le second chargement, le cristal continue tout d'abord en phase de durcissement puisque sa déformation plastique cumulée $\epsilon^p(N_1)$ est inférieure à $\epsilon_{tr}^{p(1)}$ donc à fortiori à $\epsilon_{tr}^{p(2)}$ (équation II.3.34). La transition aura lieu lorsque la déformation plastique atteindra la valeur $\epsilon_{tr}^{p(2)}$ ou, ce qui est équivalent, lorsque la limite d'élasticité atteindra la valeur $k_{lim}^{(2)}$. Le nombre N_2' de cycles alors écoulés est donné par la formule générale (II.3.31) pour $k_{inf} = k(N_1)$ et $k_{sup} = k_{lim}^{(2)}$:

$$N_2' = \frac{A}{4\sqrt{2}g}\ \mathrm{Ln}\left(\frac{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(2)}} \right) \qquad (II.3.37)$$

Après ces N_2' cycles, le point (ϵ^p, k) qui s'est déplacé sur la courbe $k(\epsilon^p)$ du second chargement, atteint le point $\left(\epsilon_{tr}^{p(2)}\ ,\ k_{lim}^{(2)}\right)$ (noté C sur la figure II.14.a). A partir de cet instant le cristal entre en phase d'adoucissement sous le second chargement toujours. Le nombre N_2'' de cycles qui s'écoulent alors avant la rupture est donc égal à $N_{II}^{(2)}$:

$$N_2'' = N_{II}^{(2)} = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(2)}} \right) \qquad \text{(II.3.38)}$$

Durant cette dernière phase, le point $(\in^p(N), k(N))$ s'est déplacé sur la partie descendante de la courbe $k(\in^p)$ du second chargement (segment CD sur la figure II.14.a). Remarquons que dans cette première configuration $\left(\in^p(N_1) \leqslant \in_{tr}^{p(1)}\right)$ la courbe $k(\in^p)$ de la suite des deux chargements coïncide avec la courbe $k(\in^p)$ du second (Fig. II.14.a). Finalement, dans cette même configuration $\left(\in^p(N_1) \leqslant \in_{tr}^{p(1)}\right)$, le nombre N_R de cycles à la rupture du cristal est égal à,

$$N_R = N_1 + \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(2)}} \right) + \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(2)}} \right)$$

(II.3.39)

où $k(N_1)$ est donné par l'équation (II.3.34).

La deuxième configuration est celle où le premier chargement est interrompu durant la phase d'adoucissement du cristal mais avant que la déformation plastique cumulée n'atteigne la valeur de transition $\in_{tr}^{p(2)}$ du second chargement (Fig. II.14.b) :

$$\epsilon^{p(1)}_{tr} < \epsilon^{p}(N_1) \leqslant \epsilon^{p(2)}_{tr} \qquad \text{(II.3.40)}$$

A la fin du premier chargement, la limite d'élasticité du cristal vaut,

$$k(N_1) = \frac{\|\Delta \underline{\underline{s}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{s}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k^{(1)}_{lim}\right)\left(1+ \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2\left(N_1 - N_I^{(1)}\right)}$$

(II.3.41)

et sa déformation plastique cumulée

$$\epsilon^{p}(N_1) = \epsilon^{p(1)}_{tr} + \frac{1}{h}\left(k^{(1)}_{lim} - k(N_1)\right) \qquad \text{(II.3.42)}$$

où $N_I^{(1)}$ est le nombre de cycles écoulés durant la phase de durcissement

$$N_I^{(1)} = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln}\left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{s}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_I^{(1)}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{s}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k^{(1)}_{lim}}\right) \qquad \text{(II.3.43)}$$

$k_I^{(1)}$ étant donné par l'équation (II.3.36). Le point $\left(\epsilon^{p}(N_1) , k(N_1)\right)$, (noté C sur la figure II.14.b) appartient alors à la partie descendante de la courbe $k(\epsilon^{p})$ du premier chargement et le cristal est alors en phase d'adoucissement. Au début du second chargement, le cristal entre à nouveau dans une phase de durcissement puisque sa déformation plastique cumulée $\epsilon^{p}(N_1)$ est inférieure à $\epsilon^{p(2)}_{tr}$. Le point $(\epsilon^{p}(N) , k(N))$ se déplace alors suivant le segment CD sur la figure II.14.b. Ce n'est qu'après N_2' cycles écoulés sous le second chargement, que la déformation plastique du

cristal atteindra la valeur de transition $\epsilon^{p(2)}_{tr}$, qui signale le début de la phase d'adoucissement (point D sur la figure II.14.b). N'_2 est le nombre de cycles nécessaires pour que la déformation plastique cumulée croisse de la valeur $\epsilon^p(N_1)$ à la valeur $\epsilon^{p(2)}_{tr}$, ou encore, pour que la limite d'élasticité croisse de la valeur $k(N_1)$ à la valeur $k(N_1) + g\left(\epsilon^{p(2)}_{tr} - \epsilon^p(N_1)\right)$:

$$N'_2 = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{ Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - \left[k(N_1) + g\left(\epsilon^{p(2)}_{tr} - \epsilon^p(N_1)\right) \right]} \right) \qquad \text{(II.3.44)}$$

Le nombre N''_2 de cycles que dure ensuite la phase d'adoucissement (segment DE sur la figure II.14.b) est donné par la formule générale (II.3.32) pour

$k_{sup} = k(N_1) + g\left(\epsilon^{p(2)}_{tr} - \epsilon^p(N_1)\right)$ et $k_{inf} = 0$ soit :

$$N''_2 = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{ Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - \left[k(N_1) + g\left(\epsilon^{p(2)}_{tr} - \epsilon^p(N_1)\right) \right]} \right) \qquad \text{(II.3.45)}$$

Finalement pour cette dernière configuration $\left(\epsilon^{p(1)}_{tr} < \epsilon^p(N_1) \leqslant \epsilon^{p(2)}_{tr}\right)$, nous obtenons un nombre N_R de cycles à la rupture du cristal égal à :

$$N_R = N_1 + N_2' + N_2'' \qquad \text{(II.3.46)}$$

où N_2' et N_2'' sont donnés par les équations (II.3.44) et (II.3.45) respectivement.

Il reste maintenant à étudier la troisième configuration, celle où le premier chargement est interrompu durant la phase d'adoucissement du cristal pour une déformation plastique $\in^p(N_1)$, supérieure à la valeur de transition $\in_{tr}^{p(2)}$ du second chargement. Remarquons que cette dernière configuration n'est pas toujours possible dans la mesure où la déformation plastique cumulée à la rupture sous le premier chargement peut être inférieure à la valeur de transition du second chargement (i.e. $\in_R^{p(1)} < \in_{tr}^{p(2)}$). Nous n'étudierons pas cette possibilité, en admettant que $\in_R^{p(1)} > \in_{tr}^{p(2)}$. Nous supposons donc vérifiée la double inégalité :

$$\in_{tr}^{p(2)} \; < \; \in^p(N_1) \; < \; \in_R^{p(1)} \qquad \text{(II.3.47)}$$

A la fin du premier chargement, la limite d'élasticité et la déformation plastique cumulée sont encore données par les équations (II.3.41) et (II.3.42) respectivement, (point C sur la figure II.14.c). Au début du second chargement, le cristal reste en phase d'adoucissement puisque sa déformation plastique cumulée $\in^p(N_1)$ est déjà supérieure à la valeur de transition $\in_{tr}^{p(2)}$. Le nombre N_2 de cycles d'application du second chargement qui s'écoulent avant la rupture du cristal (point D sur la figure II.14.c), est donné par la formule générale (II.3.32) pour $k_{inf} = 0$ et $k_{sup} = k(N_1)$:

$$N_2 = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)} \right) \qquad \text{(II.3.48)}$$

Dans cette dernière configuration $\left(\in^{p(2)}_{tr} < \in^{p}(N_1)\right)$, le nombre de cycles à la rupture du cristal est donc égal à,

$$N_R = N_1 + N_2 \qquad \text{(II.3.49)}$$

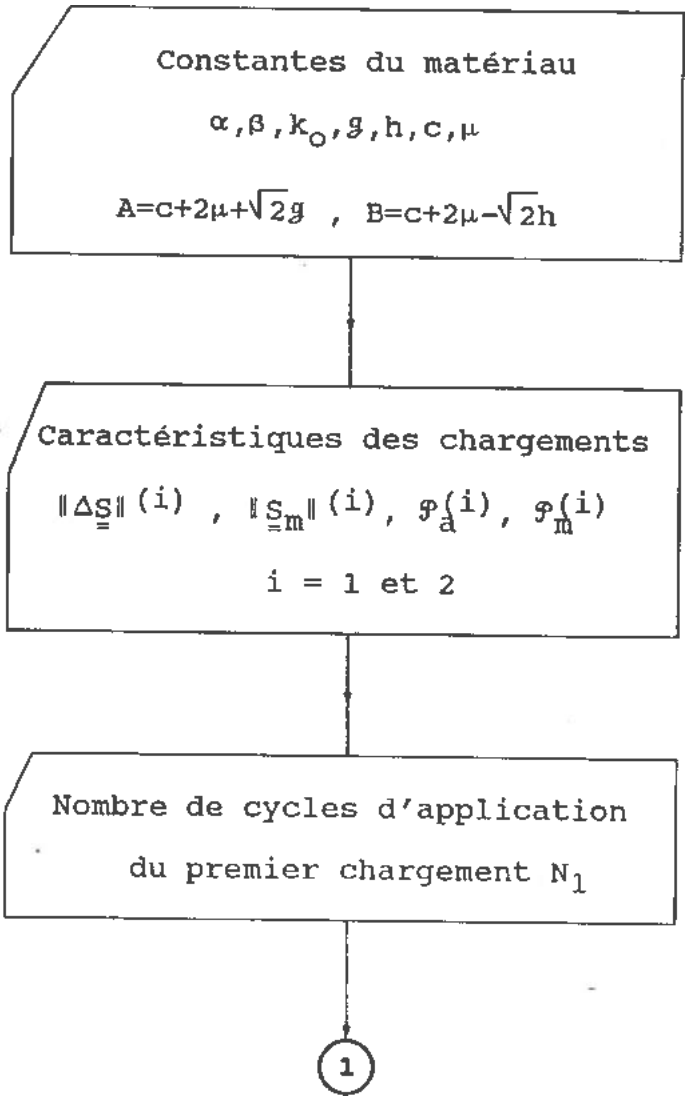
où N_2 est donné par l'équation (II.3.48). Remarquons également que dans la présente configuration $\left(\in^{p(2)}_{tr} < \in^{p}(N_1)\right)$, la courbe $k(\in^p)$ de la suite des deux chargements, coïncide avec la courbe $k(\in^p)$ du premier chargement (voir Fig. II.14.c).

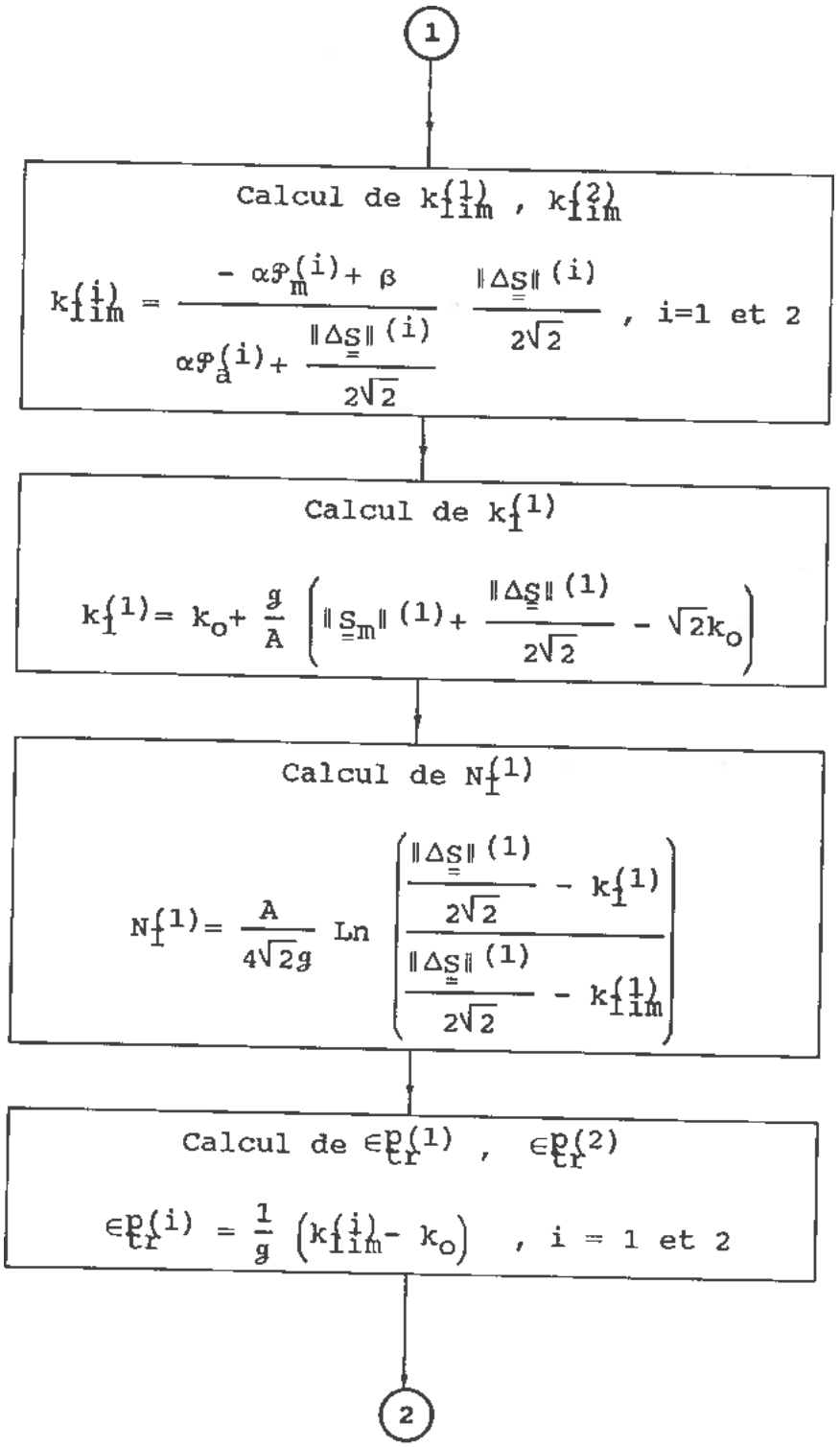
L'organigramme ci-après récapitule l'enchaînement des calculs dans les trois configurations possibles lorsque le premier des deux chargements appliqués possède la limite d'endurance généralisée la plus faible $\left(k^{(1)}_{lim} < k^{(2)}_{lim}\right)$.

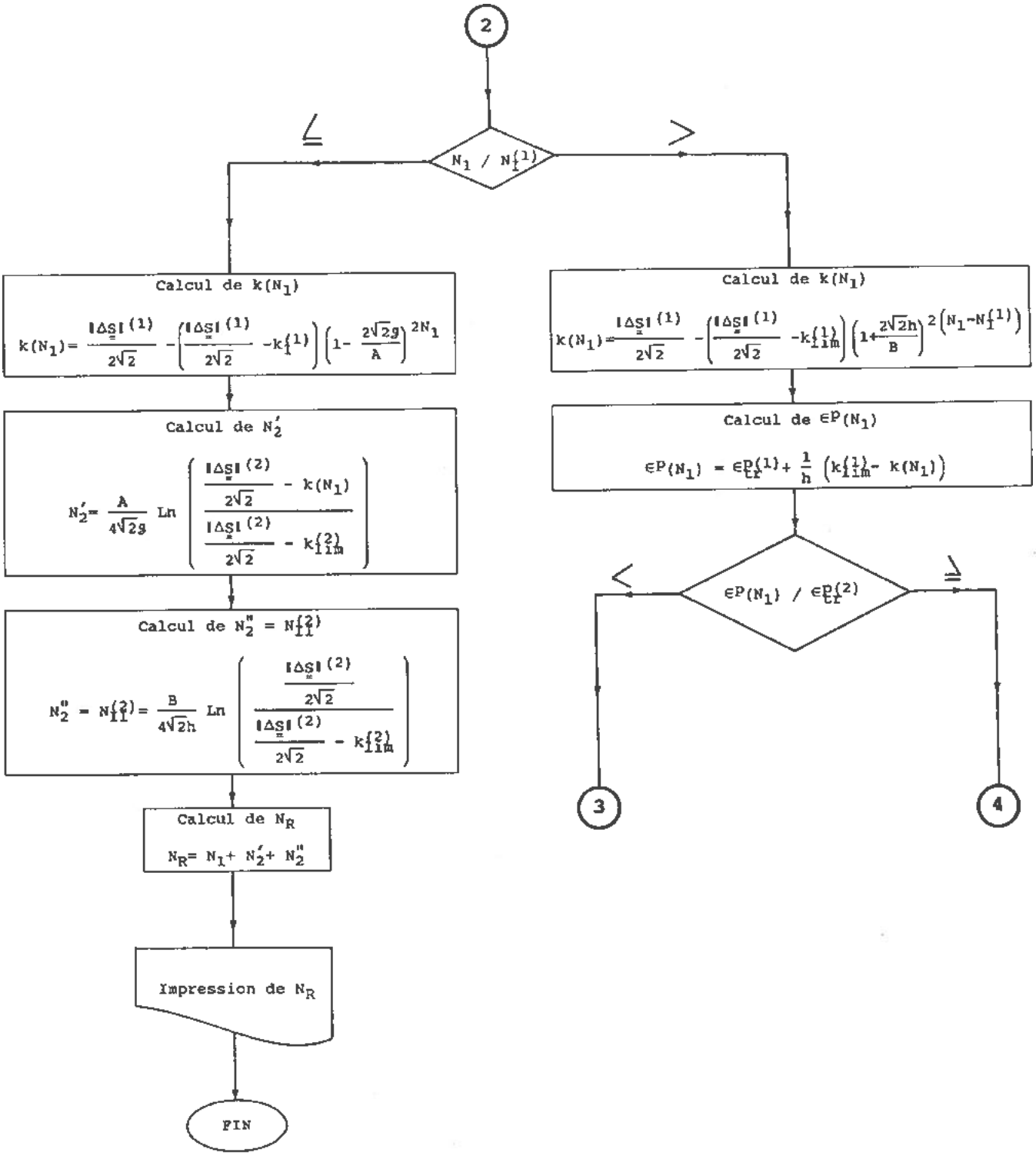
ORGANIGRAMME III

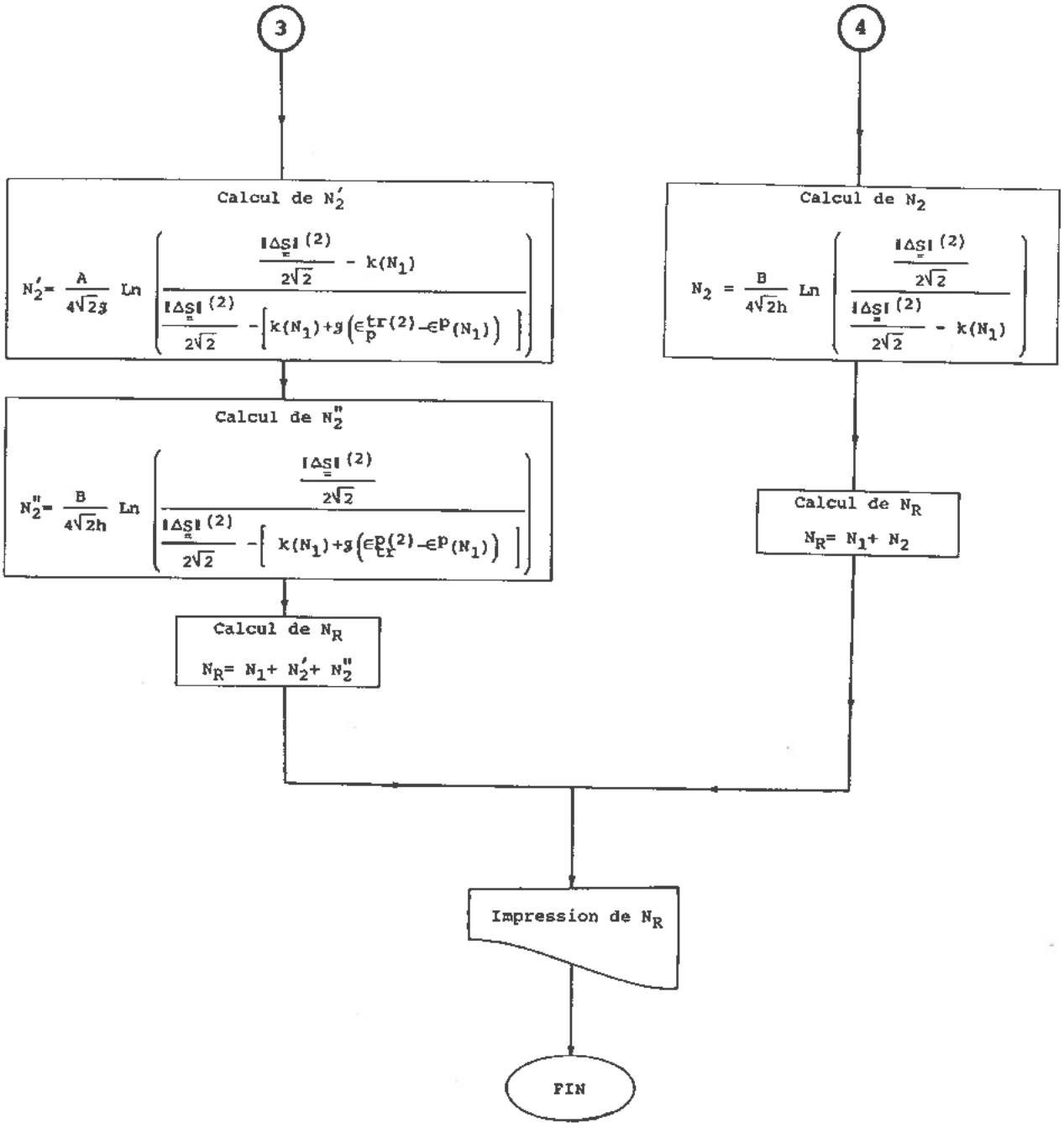
Calcul du nombre de cycles à la nucléation d'une fissure pour une suite de deux chargements cycliques proportionnels non similaires tels que :

$$k_{lim}^{(1)} < k_{lim}^{(2)}$$




1
Calcul de $k_{lim}^{(1)}$, $k_{lim}^{(2)}$
$k_{lim}^{(i)} = \frac{-\alpha \mathcal{P}_m^{(i)} + \beta}{\alpha \mathcal{P}_a^{(i)} + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}} \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}$, i=1 et 2
Calcul de $k_I^{(1)}$
$k_I^{(1)} = k_o + \frac{g}{A}\left(\|\underline{\underline{S}}_m\|^{(1)} + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}k_o\right)$
Calcul de $N_I^{(1)}$
$N_I^{(1)} = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_I^{(1)}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(1)}} \right)$
Calcul de $\in_{tr}^{p(1)}$, $\in_{tr}^{p(2)}$
$\in_{tr}^{p(i)} = \frac{1}{g}\left(k_{lim}^{(i)} - k_o\right)$, i = 1 et 2
2


2
$N_1 / N_1^{(1)}$
$\leq$
$>$
Calcul de $k(N_1)$
$k(N_1) = \frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_1^{(1)}\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N_1}$
Calcul de N_2'
$N_2' = \frac{A}{4\sqrt{2}g}\ \mathrm{Ln}\left(\frac{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(2)}}\right)$
Calcul de $N_2'' = N_{II}^{(2)}$
$N_2'' = N_{II}^{(2)} = \frac{B}{4\sqrt{2}h}\ \mathrm{Ln}\left(\frac{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(2)}}\right)$
Calcul de N_R
$N_R = N_1 + N_2' + N_2''$
Impression de N_R
FIN
Calcul de $k(N_1)$
$k(N_1) = \frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(1)}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2\left(N_1 - N_1^{(1)}\right)}$
Calcul de $\epsilon^P(N_1)$
$\epsilon^P(N_1) = \epsilon_{tr}^{P(1)} + \frac{1}{h}\left(k_{lim}^{(1)} - k(N_1)\right)$
$\epsilon^P(N_1) / \epsilon_{tr}^{P(2)}$
$<$
$\geq$
3
4


3
4
Calcul de N_2'
$N_2' = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\underline{\Delta S}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\underline{\Delta S}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - \left[k(N_1) + g\left(\epsilon_p^{tr(2)} - \epsilon^{p}(N_1)\right) \right]} \right)$
Calcul de N_2
$N_2 = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\underline{\Delta S}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\underline{\Delta S}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)} \right)$
Calcul de N_2''
$N_2'' = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\underline{\Delta S}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\underline{\Delta S}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - \left[k(N_1) + g\left(\epsilon_{tr}^{p(2)} - \epsilon^{p}(N_1)\right) \right]} \right)$
Calcul de N_R
$N_R = N_1 + N_2$
Calcul de N_R
$N_R = N_1 + N_2' + N_2''$
Impression de N_R
FIN

A titre d'exemple, nous allons traiter quatre suites de chargements non similaires dans le cas du matériau défini précédemment dans le paragraphe (II.3.1). Ces quatre suites sont toutes composées d'une traction répétée définie par son amplitude et sa valeur moyenne $\left(\Sigma_a^{(1)} = \Sigma_m^{(1)} = 300\ MP_a\right)$, suivie d'une traction alternée. Seule l'amplitude $\Sigma_a^{(2)}$ de la traction alternée varie et vaut successivement 250, 300, 400 et 800 MP_a. Les résultats obtenus sont représentés dans le diagramme de fractions de vie (figure II.15).

Chacune des quatre courbes de fractions de vie est composée de trois parties bien distinctes, qui correspondent aux trois configurations étudiées à savoir :

$$\in^{P}(N_1) \leqslant \in_{tr}^{p(1)} < \in_{tr}^{p(2)} \quad , \quad \in_{tr}^{p(1)} < \in^{P}(N_1) \leqslant \in_{tr}^{p(2)}$$

$$\text{et} \quad \left(\in_{tr}^{p(1)} < \right) \in_{tr}^{p(2)} < \in^{P}(N_1) \left(< \in_{R}^{p(1)}\right).$$

Le plus remarquable est que <u>les intensités relatives des deux chargements ne modifient pas l'allure générale de la courbe de fractions de vie</u> au sens où sa position par rapport à la droite du cumul linéaire est toujours la même. Par intensité des chargements, nous entendons aussi bien amplitude Σ_a que la valeur maximale $\Sigma_{max} = \Sigma_a + \Sigma_m$. Les quatre cas ont précisément été choisis pour explorer toutes les possibilités $\left(\Sigma_a^{(1)} \gtrless \Sigma_a^{(2)} \text{ et } \Sigma_{max}^{(1)} \gtrless \Sigma_{max}^{(2)}\right)$. Ils montrent qu'en général la suite des deux chargements diminue la durée de vie de l'éprouvette $\left(\frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} < 1\right)$, sauf si le premier chargement est interrompu durant la phase de durcissement $\left(N_1 \leqslant N_I^{(1)}\right)$, ou tout au début de la phase d'adoucissement du cristal.

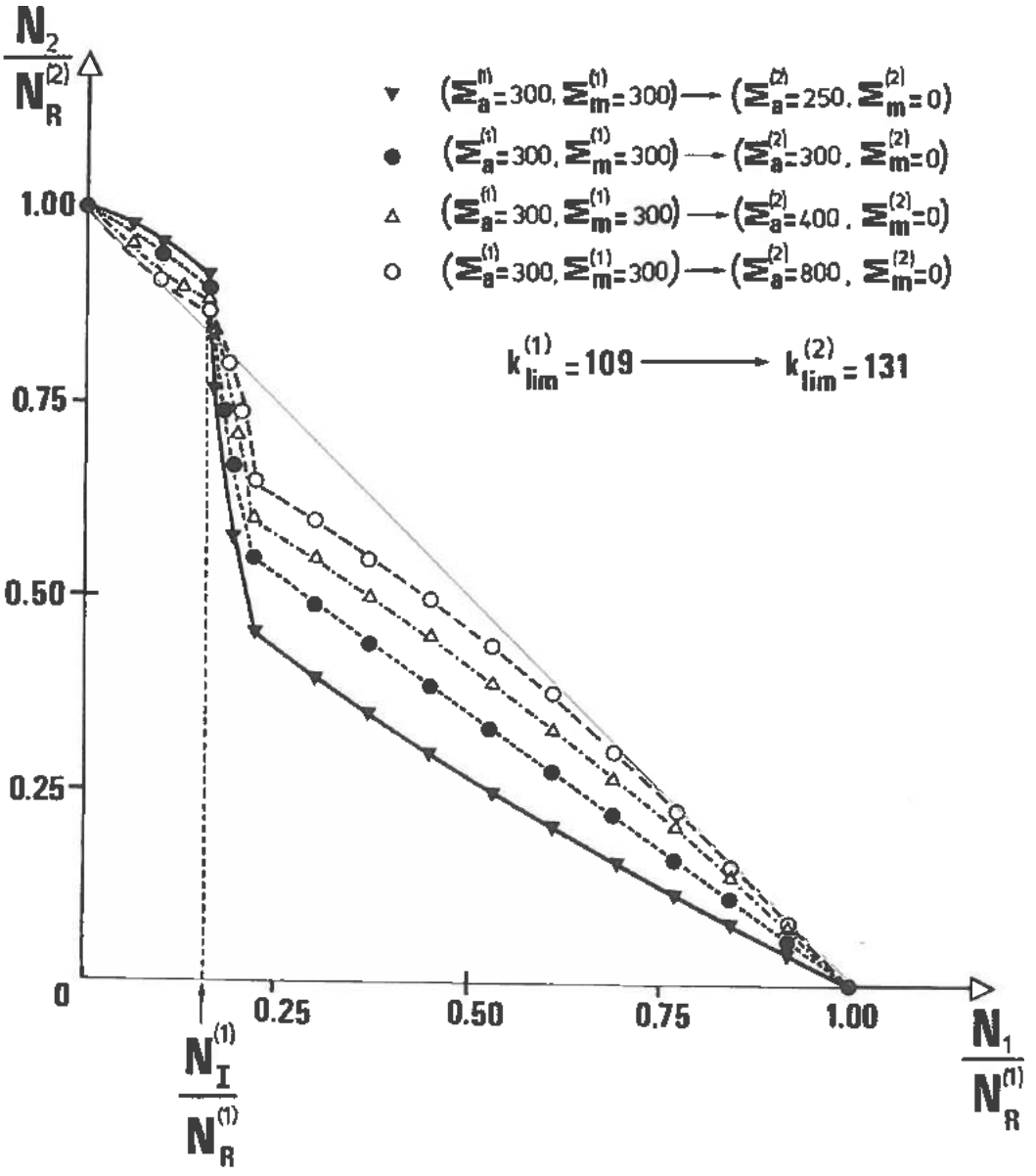


Figure II.15 Diagramme des fractions de vie pour des suites composées de deux tractions non similaires (limite d'endurance faible d'abord).

Rappelons que ces résultats sont valables dans le cas où l'ordre d'application des deux chargements est celui des limites d'endurance croissantes (i.e. $k_{lim}^{(1)} < k_{lim}^{(2)}$).

Nous allons maintenant étudier le cas où le premier chargement (indice (1)) possède la plus forte des deux limites d'endurance généralisée :

$$k_{lim}^{(1)} > k_{lim}^{(2)} \qquad \text{(II.3.50)}$$

Au niveau des déformations plastiques cumulées à la transition et à la rupture cela se traduit par les inégalités :

$$\in_{tr}^{p(1)} > \in_{tr}^{p(2)} \quad \text{et} \quad \in_{R}^{p(1)} > \in_{R}^{p(2)} \qquad \text{(II.3.51)}$$

Les calculs sont différents suivant la position de la déformation plastique cumulée à la fin du premier chargement $\in^p(N_1)$, par rapport aux valeurs de transition $\in_{tr}^{p(2)}$ et $\in_{tr}^{p(1)}$. Chacune des trois configurations possibles peut à nouveau être représentée dans le plan $(\in^p, k)$, par une courbe donnant l'évolution de la limite d'élasticité du cristal en fonction de sa déformation plastique cumulée durant la suite des deux chargements (Fig. II.16). Cette courbe coïncide avec la courbe $k(\in^p)$ caractéristique du premier chargement jusqu'au début du second chargement, puis, suivant la position du point $\left(\in^p(N_1) , k(N_1)\right)$ alors atteint, elle suit des chemins différents que nous allons déterminer. Les relations générales (équations II.3.31 et II.3.32) données au début de ce paragraphe sont toujours valables et seront souvent utilisées dans les calculs.

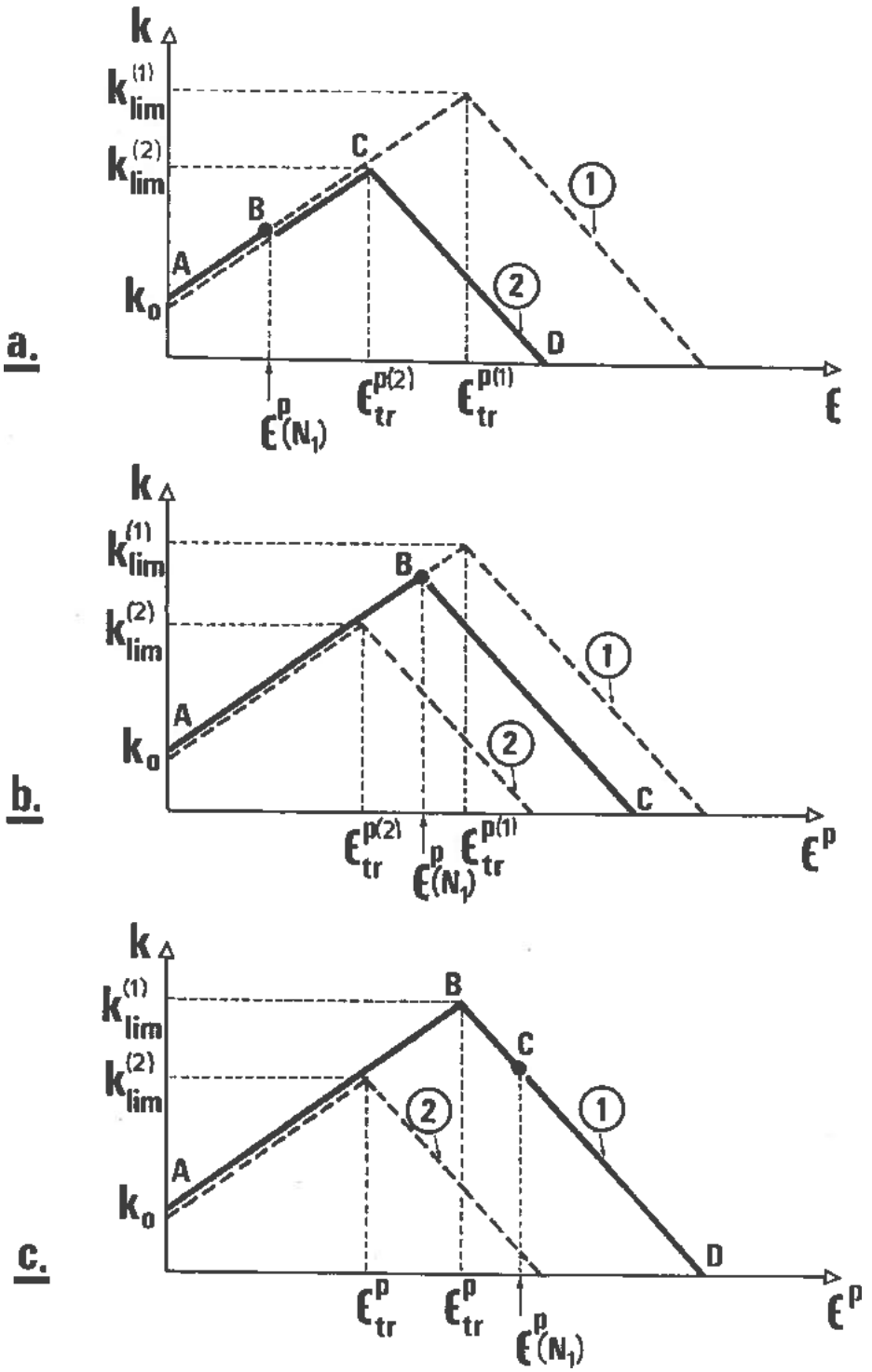


Figure II.16 Evolutions possibles de la limite d'élasticité du cristal k en fonction de la déformation plastique cumulée ϵ^p au cours d'une suite de deux chargements non-similaires $\left(k_{lim}^{(1)} > k_{lim}^{(2)}\right)$

La première configuration est celle où le premier chargement est interrompu avant que la déformation plastique cumulée n'atteigne la valeur de transition du second chargement :

$$\in^p(N_1) \leqslant \in^{p(2)}_{tr} \qquad \text{(II.3.52)}$$

D'après la première des inégalités (II.3.51), la déformation plastique cumulée à la fin du premier chargement est à fortiori inférieure à la valeur de transition $\in^{p(1)}_{tr}$, donc le cristal est encore en phase de durcissement. Le nombre N_1 de cycles d'application du premier chargement est donc tel que

$$N_1 \leqslant N_I^{(1)} \qquad \text{(II.3.53)}$$

où $N_I^{(1)}$ est le nombre de cycles que dure la phase de durcissement sous le premier chargement seul. A la fin du premier chargement, la limite d'élasticité du cristal est :

$$k(N_1) = \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_I^{(1)} \right) \left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A} \right)^{2N_1} \qquad \text{(II.3.54)}$$

et sa déformation plastique cumulée

$$\in^p(N_1) = \frac{1}{g} \left(k(N_1) - k_o \right) \qquad \text{(II.3.55)}$$

$k_I^{(1)}$ étant donné par l'équation (II.3.36). Le point $\left(\in^p(N_1),\ k(N_1) \right)$ (noté B sur la Figure II.16.a), appartient à la partie ascendante commune aux courbes $k(\in^p)$ des deux chargements. Sous le second chargement, le cristal continue en phase de durcissement et ceci jusqu'à ce que sa défor-

mation plastique cumulée, initialement inférieure à la valeur de transition $\epsilon^{p(2)}_{tr}$, atteigne cette dernière, (point C sur la figure II.16.a). La transition s'effectuera donc après le nombre N_2' de cycles nécessaires pour que, sous le second chargement, la limite d'élasticité croisse de la valeur $k(N_1)$ à la valeur $k^{(2)}_{lim}$. D'après la formule générale (II.3.31), N_2' est donné par :

$$N_2' = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k^{(2)}_{lim}} \right) \qquad \text{(II.3.56)}$$

Par la suite, le cristal entre en phase d'adoucissement et sa limite d'élasticité décroît de la valeur $k^{(2)}_{lim}$ à la valeur nulle (segment CD sur la figure II.16.a). Le nombre de cycles écoulés dans cette dernière phase est exactement $N^{(2)}_{II}$ soit :

$$N_2'' = N^{(2)}_{II} = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k^{(2)}_{lim}} \right) \qquad \text{(II.3.57)}$$

Remarquons que le chemin parcouru par le point (ϵ^p, k) au cours de la suite des deux chargements coïncide avec la courbe $k(\epsilon^p)$ du second chargement. Le nombre N_R à la nucléation d'une fissure (i.e. à la rupture du cristal) est, dans cette configuration $\left(\epsilon^p(N_1) \leqslant \epsilon^{p(2)}_{tr} \left(< \epsilon^{p(1)}_{tr}\right)\right)$:

$$N_R = N_1 + N_2' + N_2'' \qquad \text{(II.3.58)}$$

où N_2' et N_2'' sont donnés par les équations (II.3.56) et (II.3.57) respectivement.

La seconde configuration est ensuite celle où le premier chargement est interrompu après que la déformation plastique cumulée ait atteint la valeur de transition du second chargement mais avant qu'elle n'atteigne celle du premier chargement :

$$\in^{p}_{tr}{}^{(2)} < \in^{p}(N_1) \leqslant \in^{p}_{tr}{}^{(1)} \qquad \text{(II.3.59)}$$

La seconde inégalité est équivalente à :

$$N_1 \leqslant N_I^{(1)} \qquad \text{(II.3.60)}$$

A la fin du premier chargement, le cristal étant encore en phase de durcissement, sa limite d'élasticité et sa déformation plastique cumulée sont encore données par les équations (II.3.54) et (II.3.55), (point B sur la figure II.16.b). Sous le second chargement, le cristal entre immédiatement en phase d'adoucissement puisque sa déformation plastique cumulée $\in^{p}(N_1)$ est, dès le départ, supérieure à la valeur de transition $\in^{p}_{tr}{}^{(2)}$. La limite d'élasticité du cristal décroît de la valeur $k(N_1)$ à la valeur nulle sous le second chargement (segment BC sur la figure II.16.b). Le nombre de cycles N_2 qui s'écoulent alors est, d'après la relation générale (II.3.32) :

$$N_2 = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \operatorname{Ln} \left(\frac{\dfrac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)} \right) \qquad \text{(II.3.61)}$$

Dans cette configuration $\left(\epsilon^{p(2)}_{tr} < \epsilon^{p}(N_1) \leqslant \epsilon^{p(1)}_{tr}\right)$, le nombre N_R de cycles à la rupture est :

$$N_R = N_1 + N_2 \qquad \text{(II.3.62)}$$

où N_2 est donné par l'équation (II.3.61). Contrairement à la configuration précédente, le chemin parcouru par le point (ϵ^p, k) au cours de la suite des deux chargements ne coïncide avec aucune des deux courbes $k(\epsilon^p)$.

La troisième et dernière configuration est celle où le premier chargement est interrompu durant la phase d'adoucissement du cristal :

$$\epsilon^{p(1)}_{tr} < \epsilon^{p}(N_1) \qquad \text{(II.3.63)}$$

A la fin du premier chargement, la limite d'élasticité du cristal et sa déformation plastique cumulée sont respectivement données par :

$$k(N_1) = \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k^{(1)}_{lim}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2\left(N_1 - N_I^{(1)}\right)} \qquad \text{(II.3.64)}$$

et

$$\epsilon^{p}(N_1) = \epsilon^{p(1)}_{tr} + \frac{1}{h}\left(k^{(1)}_{lim} - k(N_1)\right) \qquad \text{(II.3.65)}$$

où $N_I^{(1)}$, le nombre de cycles que dure la phase de durcissement sous le premier chargement seul est donné par la relation (II.3.43). Le point (ϵ^p, k) se trouve alors sur la partie descendante de la courbe $k(\epsilon^p)$ du premier chargement

(point C sur la figure II.16.c). Lorsque commence le second chargement, le cristal continue en phase d'adoucissement puisque sa déformation plastique cumulée $\in^p(N_1)$, supérieure à $\in^{p(1)}_{tr}$, est à fortiori supérieure à $\in^{p(2)}_{tr}$. Sa limite d'élasticité décroît de la valeur $k(N_1)$ à la valeur nulle (segment CD sur la figure II.16.c) et le nombre de cycles écoulés est, d'après la formule générale (II.3.32) :

$$N_2 = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)} \right) \qquad \text{(II.3.66)}$$

où $k(N_1)$ est donné par l'équation (II.3.64). Dans cette configuration $\left(\in^{p(1)}_{tr} < \in^p(N_1)\right)$, le nombre N_R de cycles à la rupture du cristal est donné par :

$$N_R = N_1 + N_2 \qquad \text{(II.3.67)}$$

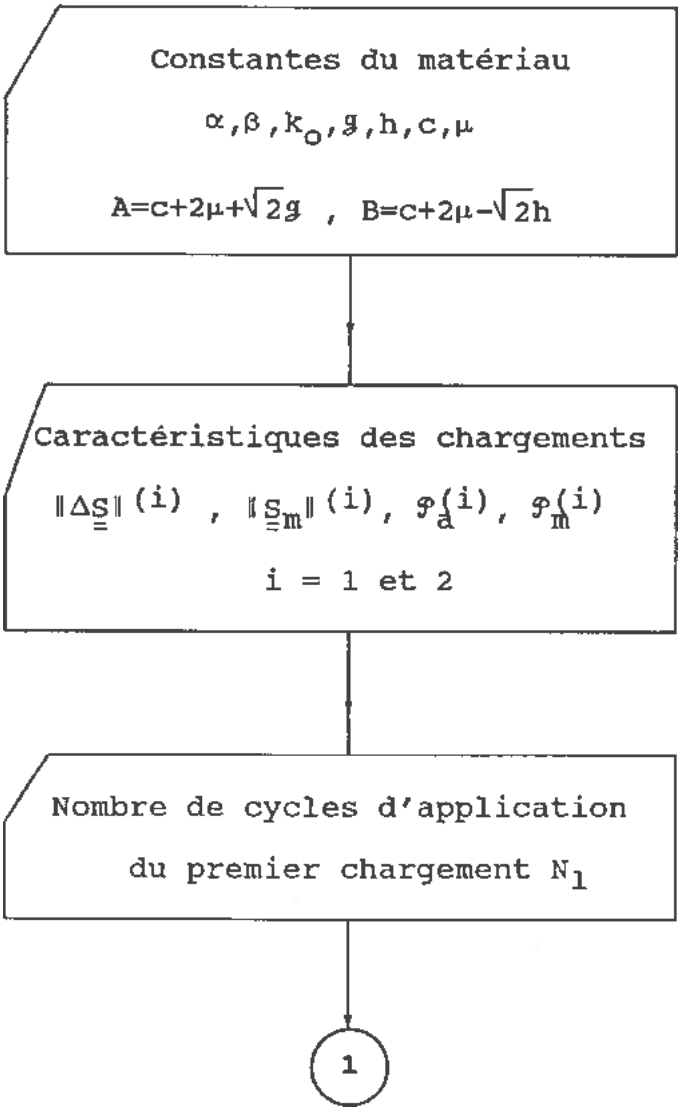
où N_2 est donné par l'équation précédente (II.3.66).

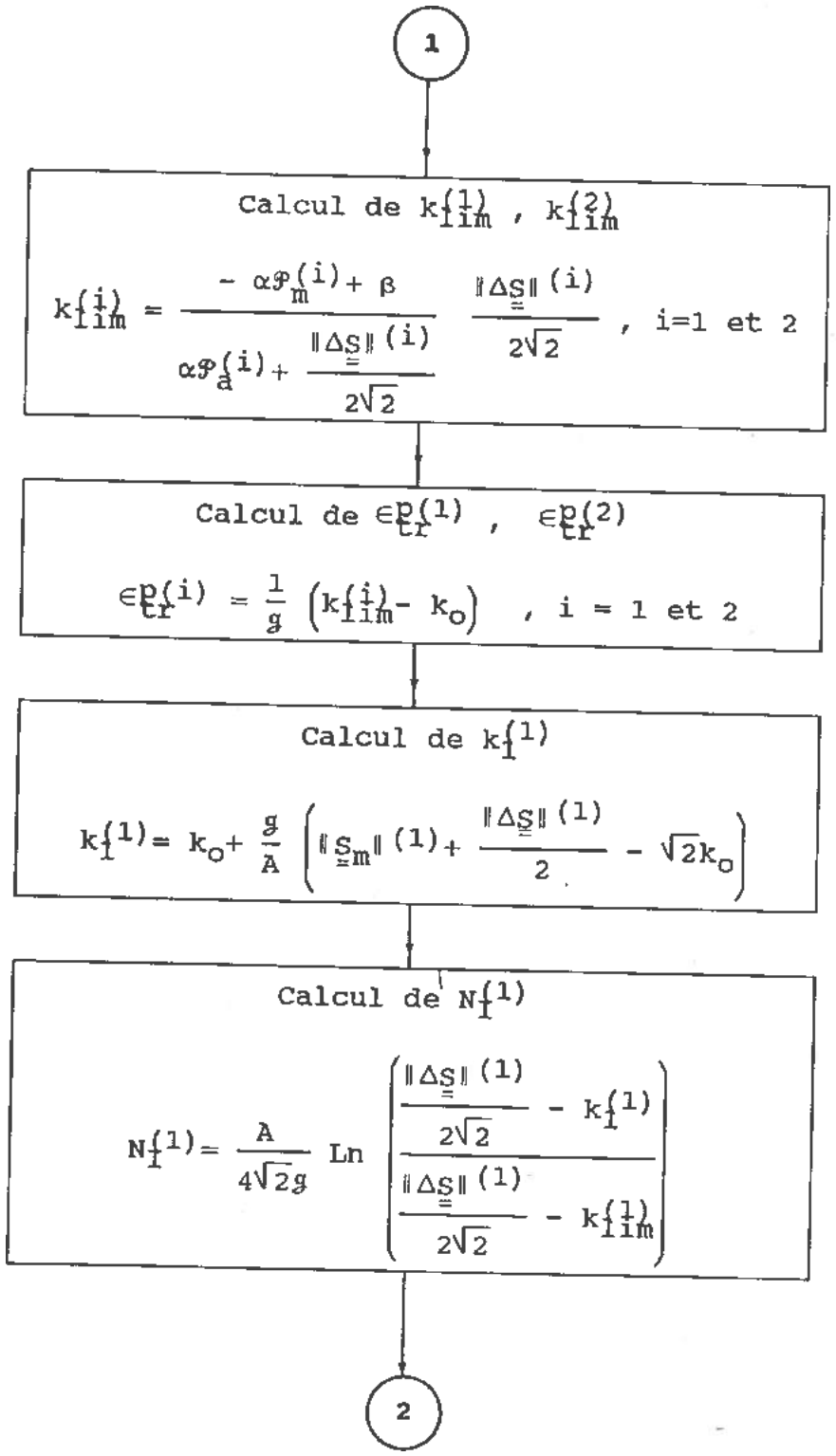
Remarquons que le chemin parcouru par le point $(k, \in^p)$ au cours de la suite des deux chargements coïncide avec la courbe $k(\in^p)$, du premier chargement. L'organigramme suivant représente l'enchaînement des calculs dans les trois configurations possibles, lorsque le premier des deux chargements possède la limite d'endurance la plus élevée $\left(k^{(1)}_{lim} > k^{(2)}_{lim} \right)$.

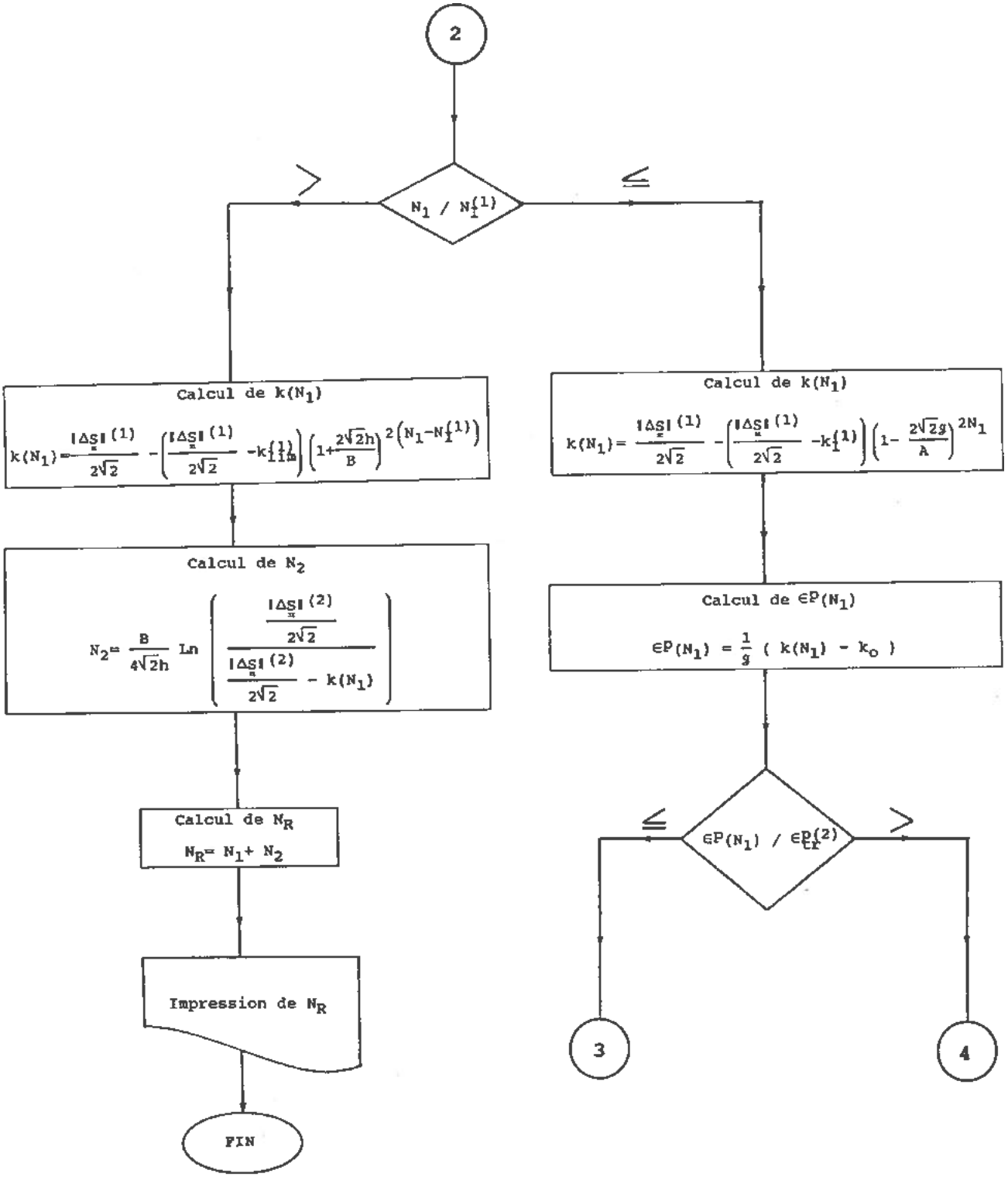
ORGANIGRAMME IV

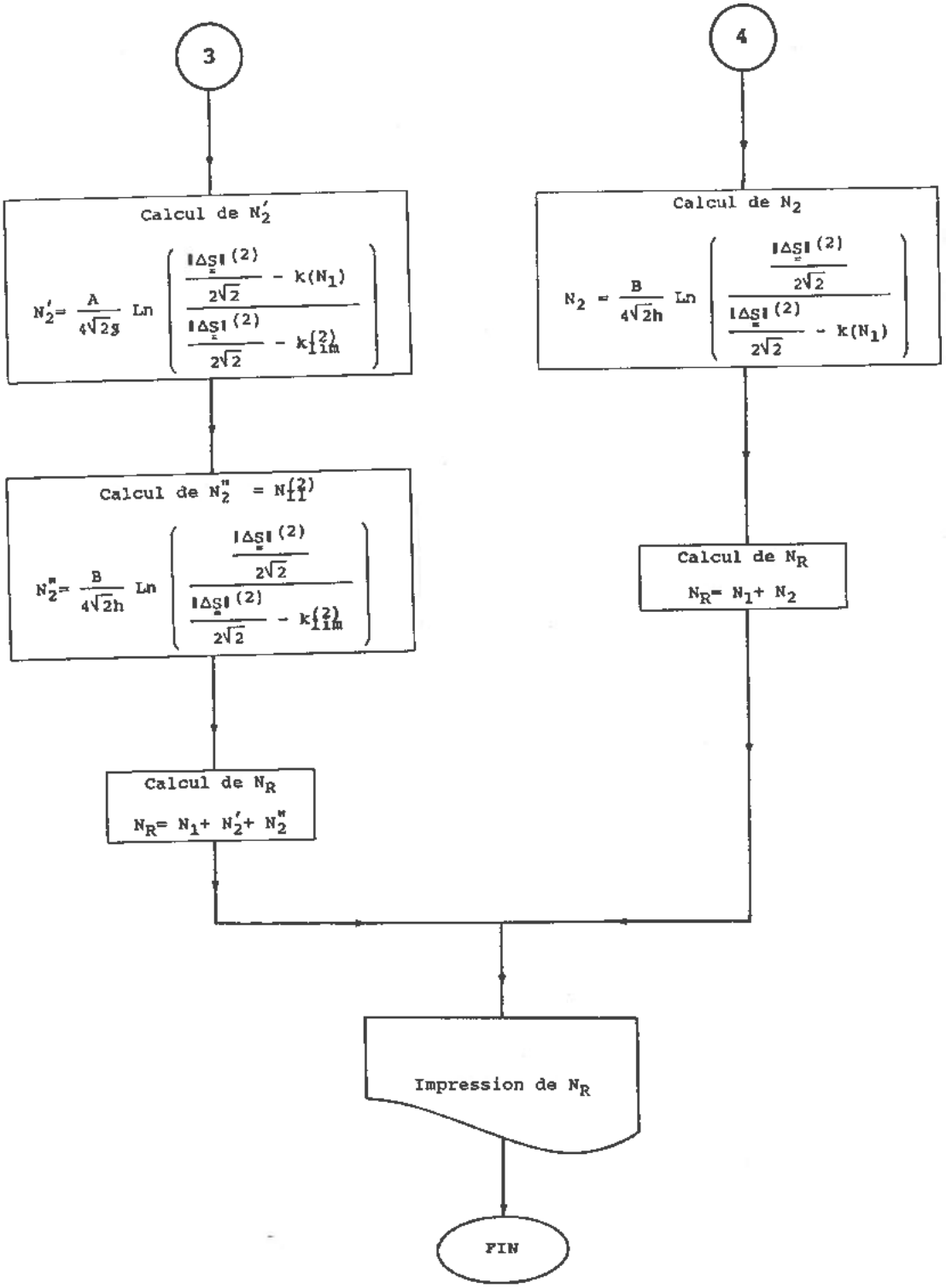
Calcul du nombre de cycles à la nucléation d'une fissure pour une suite de deux chargements cycliques proportionnels non similaires tels que :

$$k_{lim}^{(1)} > k_{lim}^{(2)}$$




1
Calcul de $k_{lim}^{(1)}$, $k_{lim}^{(2)}$
$k_{lim}^{(i)} = \frac{-\alpha \mathcal{P}_m^{(i)} + \beta}{\alpha \mathcal{P}_a^{(i)} + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}} \cdot \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(i)}}{2\sqrt{2}}$, i=1 et 2
Calcul de $\epsilon_{tr}^{p(1)}$, $\epsilon_{tr}^{p(2)}$
$\epsilon_{tr}^{p(i)} = \frac{1}{g}\left(k_{lim}^{(i)} - k_o\right)$, i = 1 et 2
Calcul de $k_I^{(1)}$
$k_I^{(1)} = k_o + \frac{g}{A}\left(\|\underline{\underline{S}}_m\|^{(1)} + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2} - \sqrt{2}k_o\right)$
Calcul de $N_I^{(1)}$
$N_I^{(1)} = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_I^{(1)}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(1)}} \right)$
2


2
$N_1 / N_1^{(1)}$
>
≤
Calcul de $k(N_1)$
$k(N_1)=\frac{|\Delta S|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{|\Delta S|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{11}^{(1)}\right)\left(1+\frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2\left(N_1-N_1^{(1)}\right)}$
Calcul de N_2
$N_2 = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln}\left(\frac{\frac{|\Delta S|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{|\Delta S|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}\right)$
Calcul de N_R
$N_R = N_1 + N_2$
Impression de N_R
FIN
Calcul de $k(N_1)$
$k(N_1)=\frac{|\Delta S|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{|\Delta S|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_1^{(1)}\right)\left(1-\frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N_1}$
Calcul de $\epsilon^p(N_1)$
$\epsilon^p(N_1) = \frac{1}{g}\left(k(N_1) - k_o\right)$
$\epsilon^p(N_1) / \epsilon_{cr}^{p(2)}$
≤
>
3
4


3
4
Calcul de N_2'
$N_2' = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(2)}} \right)$
Calcul de N_2
$N_2 = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)} \right)$
Calcul de $N_2'' = N_{11}^{(2)}$
$N_2'' = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}^{(2)}} \right)$
Calcul de N_R
$N_R = N_1 + N_2$
Calcul de N_R
$N_R = N_1 + N_2' + N_2''$
Impression de N_R
FIN

Pour permettre une comparaison objective avec le cas précédent (i.e $k_{lim}^{(1)} < k_{lim}^{(2)}$), nous allons utiliser les mêmes valeurs numériques que celles d'alors en prenant soin, bien entendu d'inverser l'ordre des deux chargements. Nous allons donc considérer quatre suites, toutes composées d'une traction alternée suivie d'une traction répétée telle que $\Sigma_a^{(2)} = \Sigma_m^{(2)} = 300$ MPa. Seule l'amplitude $\Sigma_a^{(1)}$ de la traction alternée varie $\left(\Sigma_a^{(1)} = 250, 300, 400, \text{ et } 800 \text{ MPa}\right)$. Les résultats obtenus sont représentés dans le diagramme des fractions de vie (Fig. II.17).
Chacune des quatre courbes de fractions de vie est à nouveau composée de trois parties bien distinctes correspondant aux trois configurations examinées, à savoir
$\epsilon^p(N_1) \leqslant \epsilon_{tr}^{p(2)} \left(< \epsilon_{tr}^{p(1)}\right)$, $\epsilon_{tr}^{p(2)} < \epsilon^p(N_1) \leqslant \epsilon_{tr}^{p(1)}$

et $\left(\epsilon_{tr}^{p(2)} <\right) \epsilon_{tr}^{p(1)} \leqslant \epsilon^p(N_1)$. Le plus remarquable est encore que <u>les intensités relatives des deux chargements ne modifient pas l'allure générale de la courbe de fractions de vie</u> au sens où sa position par rapport à la droite du cumul linéaire est quasiment toujours la même. Par intensité des deux chargements, nous entendons, comme auparavant aussi bien amplitude Σ_a que valeur maximale Σ_{max}.

Les quatre cas avaient été choisis de manière à explorer toutes les possibilités $\left(\Sigma_a^{(1)} \gtrless \Sigma_a^{(2)},\ \Sigma_{max}^{(1)} \gtrless \Sigma_{max}^{(2)}\right)$. Les courbes de fractions de vie montrent qu'en général la suite des deux chargements améliore la durée de vie de l'éprouvette $\left(\frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} > 1\right)$, sauf si le premier est interrompu avant ou très peu après que la déformation plastique cumulée $\epsilon^p(N_1)$ n'atteigne la valeur de transition $\epsilon_{tr}^{p(2)}$ du second chargement.

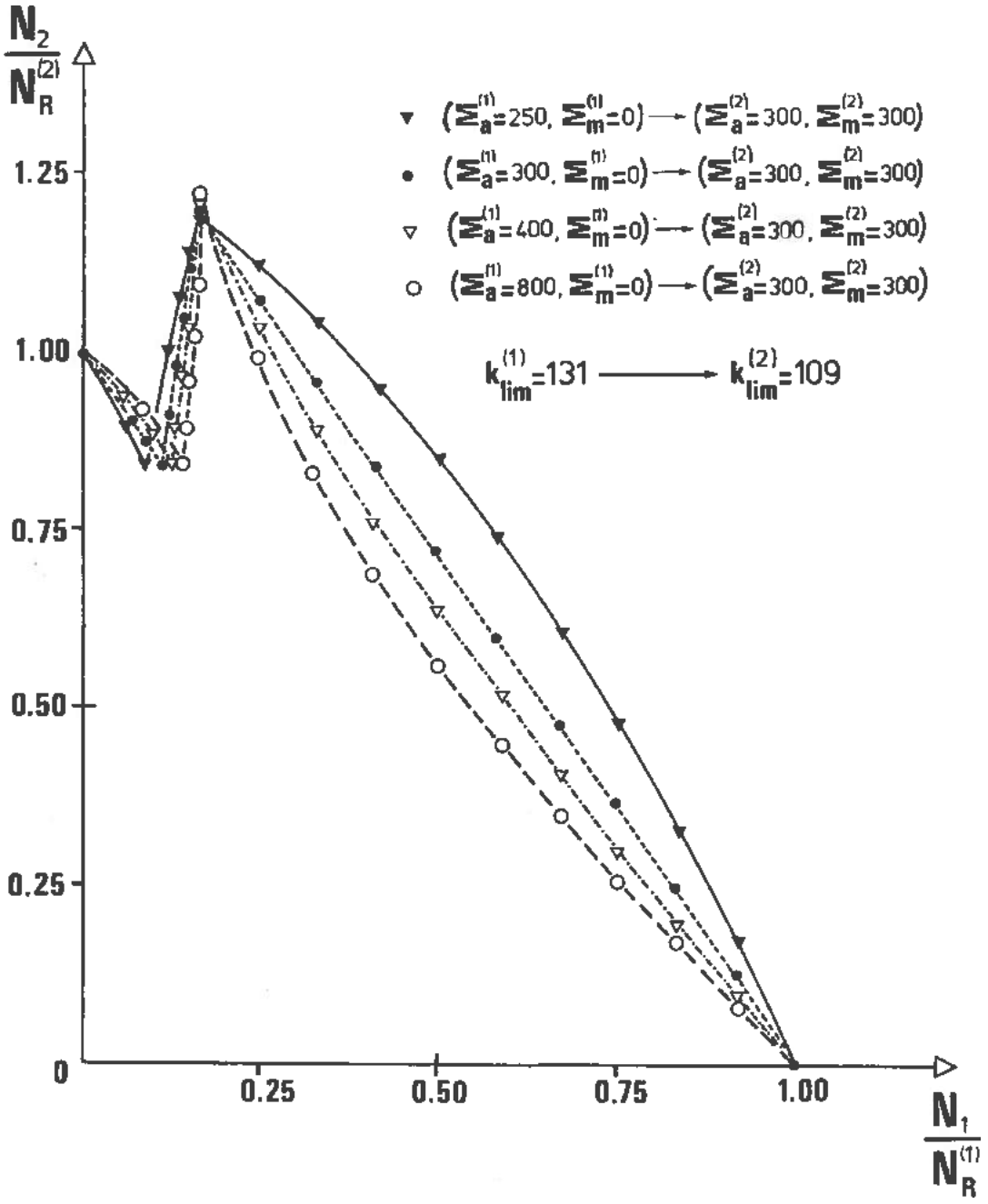


Figure II.17 Diagramme des fractions de vie pour des suites composées de deux tractions non similaires (limite d'endurance élevée d'abord).

Ces résultats sont relatifs à l'application de deux chargements non similaires dans l'ordre des limites d'endurances décroissantes $\left(k_{lim}^{(1)} > k_{lim}^{(2)}\right)$. Ils sont en quelque sorte inverses des résultats relatifs à l'application de deux chargements non similaires dans l'ordre des limites d'endurance croissantes $\left(k_{lim}^{(1)} < k_{lim}^{(2)}\right)$. Ils montrent donc que :

> **L'influence d'une suite de deux chargements non similaires sur la durée de vie de l'éprouvette ne dépend que de leurs limites d'endurance relatives et non pas de leurs intensités relatives**

Une suite de deux chargements non similaires diminue en général la durée de vie de l'éprouvette $\left(\frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} < 1\right)$ si le premier possède la plus faible des deux limites d'endurance $\left(k_{lim}^{(1)} < k_{lim}^{(2)}\right)$. Inversement, elle l'augmente $\left(\frac{N_2}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} > 1\right)$ si le premier chargement possède la plus grande des deux limites d'endurance $\left(k_{lim}^{(1)} > k_{lim}^{(2)}\right)$.

CHAPITRE III

CRISTAL A TROIS PHASES DE COMPORTEMENT CYCLIQUE

III-1 MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DU CRISTAL

Elle est encore fondée sur le concept du cristal "moyen", obéissant au critère de von Mises. En revanche, aux phases de durcissement et d'adoucissement déjà décrites, s'ajoute une phase intermédiaire dite de saturation, durant laquelle la limite d'élasticité du cristal reste constante. Nous nous limiterons à nouveau au cas des chargements périodiques proportionnels.

III.1.1 LES EQUATIONS DE BASE

Le critère de von Mises auquel obéit le cristal "moyen" s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}):(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) - k^2 \leqslant 0 \qquad \text{(III.1.1)}$$

En charge plastique (voir § III.4.2, première partie), l'évolution des microdéformations plastiques suit la règle de normalité

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda}(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{a}}) \qquad \text{(III.1.2)}$$

et la loi d'écrouissage cinématique est définie par :

$$\underline{\underline{a}} = c\underline{\underline{\varepsilon}}^p \Rightarrow \dot{\underline{\underline{a}}} = c\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \quad , \quad c \geqslant 0 \qquad \text{(III.1.3)}$$

La loi d'évolution de l'écrouissage isotrope dépend de la phase considérée :

- Durcissement

$$\dot{k} = g\sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p} \quad , \quad g > 0 \qquad \text{(III.1.4)}$$

- Saturation

$$\dot{k} = 0 \qquad \text{(III.1.5)}$$

- Adoucissement

$$\dot{k} = -h\sqrt{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p} \quad , \quad -h < 0 \qquad \text{(III.1.6)}$$

La transition entre les phases de durcissement et saturation (resp. saturation et adoucissement) s'effectue pour une valeur précise $\in^p_I$ (resp. $\in^p_{II}$) de la déformation plastique cumulée. La condition $\dot{f} = 0$ permet de calculer le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ dans chacune des trois phases et d'obtenir ensuite, par la règle de normalité (équation III.1.2), les vitesses des microdéformations plastiques. Dans le cas d'un chargement proportionnel, nous obtenons alors, pour la phase de durcissement,

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{\dot{\underline{\underline{S}}}}{A} \quad \text{soit} \quad d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{d\underline{\underline{S}}}{A} \quad , \quad A = c + 2\mu + \sqrt{2}g \qquad \text{(III.1.7)}$$

pour la phase de saturation,

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{\dot{\underline{\underline{S}}}}{C} \quad \text{soit} \quad d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{d\underline{\underline{S}}}{C} \quad , \quad C = c + 2\mu \qquad \text{(III.1.8)}$$

et pour la phase d'adoucissement,

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{\dot{\underline{\underline{S}}}}{B} \quad \text{soit} \quad d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{d\underline{\underline{S}}}{B} \quad , \quad B = c + 2\mu - \sqrt{2}h \qquad \text{(III.1.9)}$$

La déformation plastique cumulée s'en déduit immédiatement lors du durcissement,

$$\epsilon^p = \frac{1}{A} \int \sqrt{d\underline{\underline{S}} : d\underline{\underline{S}}} \quad , \quad 0 \leqslant \epsilon^p \leqslant \epsilon^p_I \qquad \text{(III.1.10)}$$

de la saturation

$$\epsilon^p = \epsilon^p_I + \frac{1}{C} \int \sqrt{d\underline{\underline{S}} : d\underline{\underline{S}}} \quad , \quad \epsilon^p_I \leqslant \epsilon^p \leqslant \epsilon^p_{II} \qquad \text{(III.1.11)}$$

et de l'adoucissement

$$\epsilon^p = \epsilon^p_{II} + \frac{1}{B} \int \sqrt{d\underline{\underline{S}} : d\underline{\underline{S}}} \quad , \quad \epsilon^p_{II} \leqslant \epsilon^p \leqslant \epsilon^p_R \qquad \text{(III.1.12)}$$

où ϵ^p_R désigne la déformation plastique cumulée à la rupture du cristal pour un chargement donné. Parallélement, la limite d'élasticité du cristal est, pendant le durcissement

$$k = k_o + g\epsilon^p \quad , \quad 0 \leqslant \epsilon^p \leqslant \epsilon^p_I \qquad \text{(III.1.13)}$$

pendant la saturation

$$k = k_s \qquad , \epsilon^p_I \leqslant \epsilon^p \leqslant \epsilon^p_{II} \tag{III.1.14}$$

et pendant l'adoucissement

$$k = k_s - h\epsilon^p \quad , \epsilon^p_{II} \leqslant \epsilon^p \leqslant \epsilon^p_R \tag{III.1.15}$$

où k_o est la limite d'élasticité initiale du cristal et k_s la limite de saturation. Rappelons que, d'après nos hypothèses k_s est égal à la limite d'endurance généralisée k_{lim} caractéristique de la classe de similarité à laquelle appartient le chargement (voir § I.2).

III.1.2 CALCUL DE LA LIMITE D'ELASTICITE DU CRISTAL ET DE SA DEFORMATION PLASTIQUE CUMULEE

Soit N_I, N_{II} et N_{III}, les nombres de cycles effectués dans chacune des trois phases lors d'un chargement cyclique proportionnel.

La phase de durcissement d'un cristal à trois phases étant strictement identique à celle d'un cristal à deux phases qui serait soumis au même chargement (voir § II.1.2), nous disposons déjà de l'expression de la limite d'élasticité :

$$k(N) = \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_1\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N} \quad , \quad 0 \leqslant N \leqslant N_I \qquad \text{(III.1.16)}$$

où

$$k_1 = k_o + \frac{g}{A}\left(\|\underline{\underline{S}}_m\| + \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2} - \sqrt{2}k_o\right) \qquad \text{(III.1.17)}$$

La signification de $\|\underline{\underline{S}}_m\|$ et de $\|\Delta\underline{\underline{S}}\|$ est la même qu'auparavant (voir § II.1.2).

Lors de la phase de saturation, nous avons tout simplement :

$$k(N) = k_{lim} \quad , \quad N_I \leqslant N \leqslant N_I + N_{II} \qquad \text{(III.1.18)}$$

Enfin, la phase d'adoucissement d'un cristal à trois phases est identique à celle d'un cristal à deux phases d'où (voir § II.1.2) :

$$k(N) = \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2(N-N_I-N_{II})} , N_I+N_{II} \leqslant N \leqslant N_R$$

(III.1.19)

Remarquons que les phases de saturation et d'adoucissement n'ont pas forcément lieu. En effet, l'équation (III.1.16) prise pour N tendant vers l'infini, montre que la limite d'élasticité de transition $k_{lim} = k_s$ qui signale la fin de la phase de durcissement ne peut être atteinte que si $\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}$

est strictement supérieur à k_{lim} . Nous avons donc implicitement supposé que cette condition était vérifiée.

En ce qui concerne la déformation plastique cumulée, seule la phase de saturation donne lieu à de nouveaux calculs. Durant la phase de durcissement, nous savons que (voir § II.1.2),

$$\epsilon^p(N)=\frac{1}{g}\left\{\left[\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_o\right] - \left[\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_1\right]\left[1- \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right]^{2N}\right\} , \quad 0 \leqslant N \leqslant N_I$$

(III.1.20)

où k_1 est donné par l'équation (III.1.17).

La quantité $\delta\epsilon^p_I$ de la déformation plastique cumulée au cours d'un cycle de la phase de saturation est constante, puisque la limite d'élasticité du cristal reste alors égale à k_{lim} :

$$\delta\epsilon^p_I = \frac{4\sqrt{2}}{C}\left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right) \qquad \text{(III.1.21)}$$

Après N cycles de charges, $N_I \leqslant N \leqslant N_I+N_{II}$, la déformation plastique cumulée vaut :

$$\epsilon^p(N) = \epsilon^p_I + \frac{4\sqrt{2}}{C}\left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right)(N - N_I) , \quad N_I \leqslant N \leqslant N_I+N_{II}$$

(III.1.22)

Enfin, en phase d'adoucissement, nous obtenons (voir aussi § II.1.2) :

$$\epsilon^p(N) = \epsilon^p_{II} + \frac{1}{h}\left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right)\left[\left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2(N-N_I-N_{II})} - 1\right] \quad ,$$

$$, \quad N_I + N_{II} < N < N_R \qquad \text{(III.1.23)}$$

Les équations (III.1.16), (III.1.18), (III.1.19) d'une part, et (III.1.20), (III.1.22), (III.1.23) d'autre part, montrent que la limite d'élasticité du cristal k et la microdéformation plastique cumulée ϵ^p s'expriment en fonction du chargement macroscopique et du nombre de cycles écoulés.

III-2 CALCUL DU NOMBRE DE CYCLES A LA NUCLEATION D'UNE FISSURE DE FATIGUE

Dans le cas du cristal à deux phases, pour calculer le nombre de cycles à la nucléation d'une microfissure de fatigue, il suffit de connaître le module élastique de cisaillement μ, les limites d'élasticité initiale k_o et de transition $k_{tr} = k_{lim}$, le module d'écrouissage cinématique c et les lois d'évolution de l'écrouissage isotrope dans chacune des deux phases (modules g et h).

Dans le cas du cristal à trois phases, les mêmes données ne suffisent plus. En effet, si nous pouvons encore calculer les nombres de cycles N_I et N_{III} que durent les phases de durcissement et d'adoucissement respectivement, le nombre de cyles N_{II} que dure la phase de saturation reste indéterminé.
Cette indétermination sur $N_R = N_I + N_{II} + N_{III}$ sera levée au prix d'une hypothèse supplémentaire concernant la déformation plastique cumulée $\in_R^p$ à la rupture du cristal. La formulation de cette hypothèse nous donnera l'occasion de rappeler notre définition de la variable d'endommagement. Nous vérifierons ensuite que le critère de fatigue est inchangé dans le cas du cristal à trois phases et, pour terminer, nous donnerons la courbe de Wöhler généralisée à la nucléation d'une microfissure de fatigue.

III.2.1 VARIABLE D'ENDOMMAGEMENT

Lors d'un chargement cyclique, l'endommagement est mesuré, à tout instant, par la microdéformation plastique cumulée :

$$D(N) = \epsilon^p(N) \qquad \text{(III.2.1)}$$

Si le chargement est proportionnel et suffisamment élevé pour entraîner la rupture du cristal, l'évolution du dommage est alors donnée par les équations (III.1.20), (III.1.22) et (III.1.23) où ϵ^p est remplacé par D :

$$D(N) = \frac{1}{g}\left[\left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_o\right) - \left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_1\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N}\right], \quad 0 \leqslant N \leqslant N_I$$

(III.2.2)

$$D(N) = D_I + \frac{4\sqrt{2}}{C}\left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right)(N - N_I), \quad N_I \leqslant N \leqslant N_I + N_{II}$$

(III.2.3)

et

$$D(N) = D_{II} + \frac{1}{h}\left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right)\left[\left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2(N-N_I-N_{II})} - 1\right],$$

$$N_I + N_{II} < N < N_R \qquad \text{(III.2.4)}$$

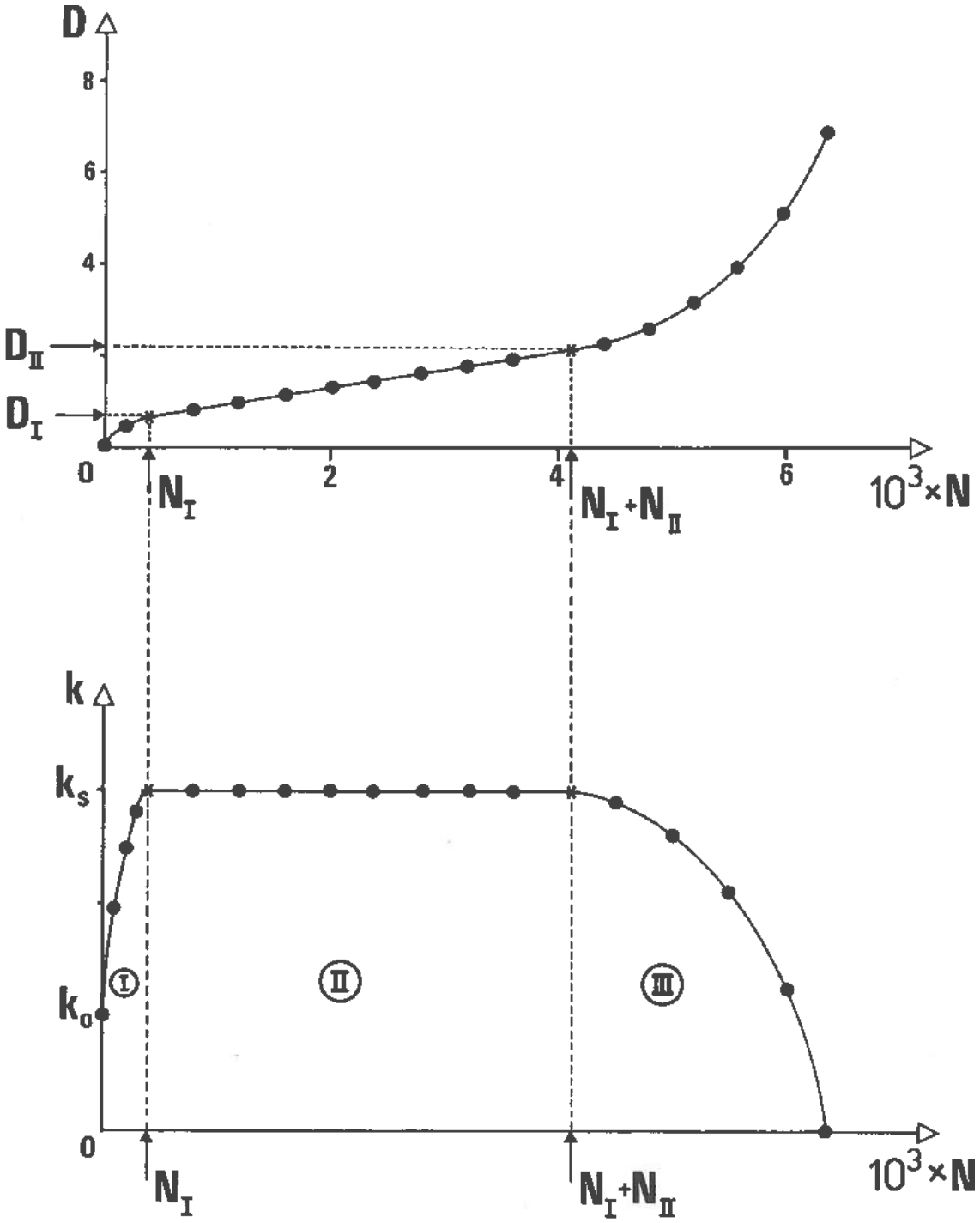


Figure III.1 Evolutions du dommage et de la limite d'élasticité pour un cristal à trois phases soumis à un chargement proportionnel.

La figure III.1 représente la courbe du dommage décrite par les trois équations précédentes, ainsi que l'évolution de la limite d'élasticité du cristal (voir équations III.1.16, III.1.18 et III.1.19) pour un même chargement proportionnel. La courbe du dommage est concave durant la phase de durcissement mais convexe durant la phase d'adoucissement. Durant la phase de saturation, le dommage augmente linéairement en fonction du nombre de cycles écoulés dans cette phase.

Le dommage cumulé dans la première phase vaut :

$$D_I = \epsilon^p_I = \frac{k(N_I)-k_o}{g} = \frac{k_{lim}- k_o}{g} \qquad \text{(III.2.5)}$$

Le dommage cumulé dans la troisième phase est :

$$D_R- D_{II} = \epsilon^p_R- \epsilon^p_{II} = \frac{k_{lim}}{h} \qquad \text{(III.2.6)}$$

En revanche, le dommage cumulé dans la seconde phase, i.e. $D_{II} - D_I = \epsilon^p_{II} - \epsilon^p_I$, est indéterminé. Pour lever cette indétermination, nous allons supposer que la déformation plastique cumulée à la rupture du cristal ϵ^p_R est, comme dans le cas du cristal à deux phases, une fonction affine de k_{lim} (voir équation II.2.10). D'après les équations (III.2.5) et (III.2.6), l'identité

$$\epsilon^p_R = \epsilon^p_I + \left(\epsilon^p_{II}- \epsilon^p_I\right) + \left(\epsilon^p_R- \epsilon^p_{II}\right) \qquad \text{(III.2.7)}$$

s'écrit aussi

$$\epsilon^p_R = \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) k_{lim}- \frac{k_o}{g} + \left(\epsilon^p_{II}- \epsilon^p_I\right) \qquad \text{(III.2.8)}$$

Si nous posons alors

$$\epsilon^p_{II} - \epsilon^p_I = D_{II} - D_I = \frac{k_{lim}}{\ell} \quad , \quad \ell > 0 \qquad \text{(III.2.9)}$$

nous obtenons

$$\epsilon^p_R = \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{h}\right) k_{lim} - \frac{k_o}{g} \qquad \text{(III.2.10)}$$

qui est bien une fonction affine de k_{lim}. En revanche nous avons dû introduire une nouvelle constante du matériau ℓ, homogène à un module d'écrouissage et qu'il faudra identifier.

L'hypothèse (III.2.7) nous permet, comme dans le cas du cristal à deux phases, de définir une courbe $k(\epsilon^p)$ unique pour tous les chargements d'une même classe de similarité. En effet, les équations (III.1.13), (III.1.14) et (III.1.15) peuvent être regroupées sous la forme :

$$\begin{aligned} k(\epsilon^p) = {} & \left(k_o + g\epsilon^p \right) \left[1 - H\left(\epsilon^p - \epsilon^p_I \right) \right] + \\ & + k_{lim} \left[H\left(\epsilon^p - \epsilon^p_I\right) - H\left(\epsilon^p - \epsilon^p_{II}\right) \right] + \\ & + \left[k_{lim} - h\left(\epsilon^p - \epsilon^p_{II}\right) \right] H\left(\epsilon^p - \epsilon^p_{II}\right) \end{aligned} \qquad \text{(III.2.11)}$$

où k_{lim} est la limite d'endurance généralisée de la classe de similarité considérée, H est la fonction de Heaviside et les valeurs ϵ^p_I et ϵ^p_{II}, données par les équations (III.2.5), (III.2.7), ne dépendent que de k_o, k_{lim}, g et ℓ. La figure

III.2 représente les courbes d'écrouissages $k(\in^p)$ de deux chargements proportionnels non similaires. Nous remarquons que toutes les courbes d'écrouissage relatives aux diverses classes de similarité ont une partie ascendante commune.

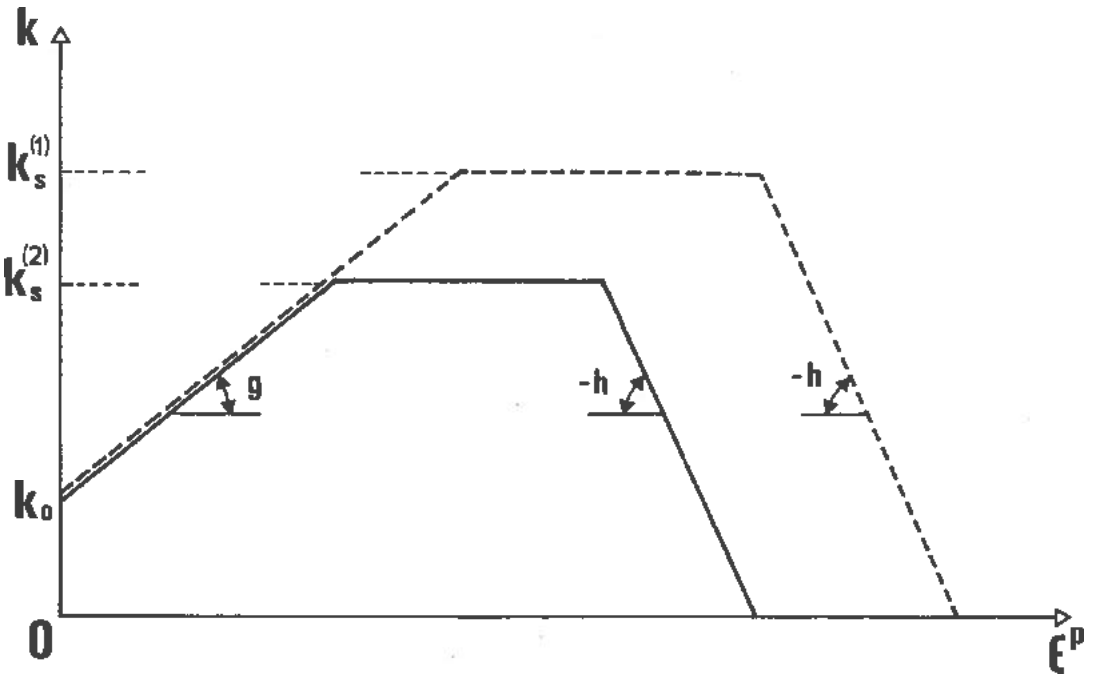


Figure III.2 Courbes d'écrouissage $k(\in^p)$ pour deux chargements proportionnels non similaires.

III.2.2 CRITERE DE FATIGUE

Le critère de fatigue proposé dans la première partie est à priori indépendant du nombre et de la nature des phases qui composent le comportement élastoplastique du cristal. En effet, il ne dépend que de la limite d'endu-

rance généralisée k_{lim} qui doit alors être interprétée comme la valeur maximale de la limite d'élasticité du cristal et non pas comme la valeur qui signale la transition entre telle et telle phase de comportement. En revanche, la formulation de ce même critère de fatigue en termes de dommage dépend de l'évolution de la déformation plastique cumulée donc des phases de comportement choisi.

Comme dans le cas du cristal à deux phases (voir § II.2.2), nous allons maintenant établir la formulation du critère de fatigue en termes de dommage pour le cristal à trois phases.

Pour un chargement proportionnel, nous avons $k^* = \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}}$, et le critère de fatigue proposé s'écrit :

$$\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} \leq k_{lim} \qquad \text{(III.2.12)}$$

Si cette inégalité est satisfaite, l'équation (III.1.16) montre que la limite d'élasticité du cristal ne peut pas atteindre la valeur k_{lim} au bout d'un nombre fini de cycles de la phase de durcissement. Dans ce cas, la valeur du dommage est toujours donnée par l'équation (II.2.2) qui, pour N tendant vers l'infini, conduit à :

$$\lim_{N\to+\infty} D(N) = \frac{1}{g}\left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_o\right) \qquad \text{(III.2.13)}$$

Donc lors d'un chargement proportionnel ne violant pas le critère de fatigue, le dommage D est tel que :

$$\lim_{N\to+\infty} D(N) \leqslant \frac{k_{lim} - k_o}{g} = D_I \qquad \text{(III.2.14)}$$

Inversement, il est facile de vérifier que si l'inégalité (III.2.14) est vérifiée, le cristal demeure en phase de durcissement et donc, sa limite d'élasticité, lorsque le nombre de cycles tend vers l'infini, reste inférieure à k_{lim}. L'équation (III.1.16) conduit aussi à l'inégalité (III.2.12) qui est l'expression du critère de fatigue pour un chargement proportionnel

L'équivalence

$$k^* \leqslant k_{lim} \iff \lim_{N\to+\infty} D(N) \leqslant D_I \qquad \text{(III.2.15)}$$

qui vient ainsi d'être démontrée dans le cas des chargements proportionnels est identique à celle obtenue dans le cas du cristal à deux phases puisque la valeur du dommage D_I ne dépend que de la phase de durcissement. Il apparaît donc que les deux comportements étudiés (durcissant-adoucissant, et durcissant-saturé-adoucissant) ne conduisent pas à des formulations du critère de fatigue différentes en termes de dommage. Ceci n'est pas vrai pour tous les types de comportement. Par exemple, pour un cristal dont la limite d'élasticité serait constante égale à k_o dans une première phase, puis croissante jusqu'à k_{lim} dans une deuxième phase et enfin décroissante dans une troisième et dernière phase, il est facile de montrer que nous obtiendrons l'équivalence suivante :

$$k^* \leqslant k_{lim} \iff \lim_{N\to+\infty} D(N) \leqslant D'_{II} \qquad \text{(III.2.16)}$$

où D'_{II}, la valeur du dommage à la fin de la seconde phase de comportement (durcissement), est différente de D_I. Dans ce cas, la formulation du critère de fatigue en termes de dommage est de même nature (limitation de la valeur du dommage) mais la valeur limite du dommage est différente.

Comme dans le cas du cristal à deux phases, nous pouvons maintenant étudier l'influence d'un préchargement cyclique sur le critère de non nucléation du cristal à trois phases. Pour cela, il n'est pas nécessaire de reprendre les calculs effectués pour le cristal à deux phases (§ II.2.3). Il suffit de remarquer que nous devons maintenant examiner quatre possiblités suivant la nature et la durée d'application du préchargement, à savoir, un sous-chargement ou un sur-chargement interrompu en phase de durcissement, de saturation ou d'adoucissement. Seul le cas d'un sur-chargement interrompu en phase de saturation est nouveau. Les autres cas conduisent exactement aux mêmes modifications du critère de non nucléation que dans le cas du cristal à deux phases. Pour un sur-chargement interrompu en phase de saturation, la modification du critère de non nucléation est toujours la même quel que soit le nombre de cycles d'application du sur-chargement. Il s'agit de la modification "optimale" qui avait été obtenue dans le cas du cristal à deux phases en interrompant le surchargement au moment de la transition entre les deux phases (voir § II.2.3, Fig. II.5). Le cristal à trois phases présente donc un avantage par rapport au cristal à deux phases dans la mesure où la modification "optimale" de son critère de non nucléation ne nécessite pas l'application d'un nombre précis de cycles de sur-chargement.

III.2.3 COURBE DE WOHLER A LA NUCLEATION

Le nombre N_R de cycles à la nucléation d'une fissure de fatigue (i.e. à la rupture du cristal) est la somme des nombres de cycles N_I, N_{II} et N_{III} effectués dans chacune des trois phases de comportement du cristal.

Pour N_I et N_{III}, les nombres de cycles que durent les phases de durcissement et d'adoucissement respectivement, les calculs sont les mêmes que dans le cas du cristal à deux phases (voir § II.2.4). Pour calculer le nombre N_{II} que dure la phase de saturation, nous utilisons la relation

$$\epsilon^p_{II} - \epsilon^p_I = \frac{k_{lim}}{\ell} \qquad \text{(III.2.17)}$$

où, par définition de ϵ^p_{II} et d'après l'équation (III.1.22)

$$\epsilon^p_{II} = \epsilon^p(N_I + N_{II}) = \epsilon^p_I + \frac{4\sqrt{2}}{C}\left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right)(N_I + N_{II} - N_I) \qquad \text{(III.2.18)}$$

L'équation (III.2.17) devient donc :

$$\frac{4\sqrt{2}}{C}\left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right) N_{II} = \frac{k_{lim}}{\ell} \qquad \text{(III.2.19)}$$

soit encore, en remplaçant C par $c + 2\mu$,

$$N_{II} = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}\ell} \left(\frac{k_{lim}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) \qquad \text{(III.2.20)}$$

Pour obtenir N_R, il suffit maintenant d'ajouter N_{II} au nombre $N_I + N_{III}$ de cycles à la nucléation trouvé dans le cas du cristal à deux phases. En choisissant l'expression simplifiée de $N_I + N_{III}$ (voir équation II.2.49), nous obtenons

$$N_R = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) +$$

$$+ \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\ell} \frac{k_{lim}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} - \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \frac{1}{g} \frac{k_o}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{(III.2.21)}$$

La courbe d'équation (III.2.21) donne le nombre de cycles N_R à la nucléation d'une fissure en fonction de la variation $\Delta \underline{\underline{S}}$ du tenseur macroscopique déviatorique. L'influence de l'amplitude $\mathcal{P}_a$ et de la valeur moyenne $\mathcal{P}_m$ de la pression hydrostatique, se manifeste par l'intermédiaire de k_{lim} puisque nous avons

$$k_{lim} = \frac{-\alpha \mathcal{P}_m + \beta}{\alpha \mathcal{P}_a + \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}}} \frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|}{2\sqrt{2}} \qquad \text{(III.2.22)}$$

En revanche, l'influence du déviateur moyen $\underline{\underline{S}}_m$ a été négligée. La figure III.3, représente les courbes obtenues en

particularisant l'équation (III.2.21) pour une torsion et une flexion alternées. Ces deux courbes ont bien l'allure générale des courbes S-N (courbes de Wöhler) que nous obtenons expérimentalement.

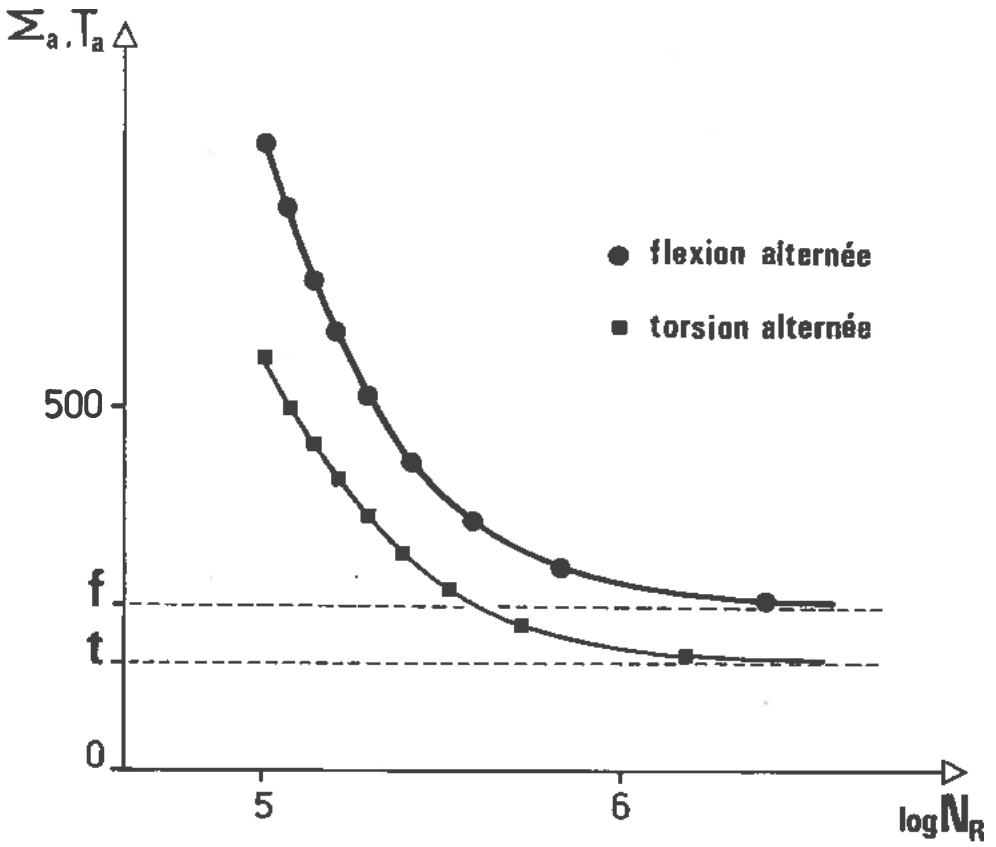


Figure III.3 Courbes S-N à la nucléation obtenues à partir du modèle proposé.

En plus du module élastique de cisaillement μ généralement connu, la courbe de Wöhler généralisée (équation III.2.21) dépend de cinq constantes du matériau (c, $\mathcal{g}$, h, ℓ et k_o). En réalité, trois combinaisons seulement de ces cinq constantes peuvent être identifiées à partir des résultats expérimentaux d'une seule courbe S-N uniaxiale, à

savoir $\frac{c + 2\mu}{\ell}$, $\frac{c + 2\mu}{g} k_o$, $(c + 2\mu)\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right)$. En contrepartie, la connaissance de ces trois coëfficients est suffisante pour obtenir la courbe S-N à la nucléation pour tout chargement multiaxial proportionnel. En pratique, l'identification des trois coëfficients peut être effectuée en deux étapes successives. Dans un premier temps, seuls les essais proches de la limite d'endurance (i.e. tels que $\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}}$ soit proche de k_{lim}) sont pris en compte. Pour de tels essais, nous pouvons négliger le dernier terme de l'équation (III.2.21) puisqu'il reste fini alors que les deux autres tendent vers l'infini. L'équation de la courbe de Wöhler à la nucléation est alors peu différente de :

$$N_R = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) + \frac{1}{\ell} \frac{k_{lim}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right] \qquad \text{(III.2.23)}$$

En effectuant le changement de variables

$$x = \frac{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}{k_{lim}} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right)$$

$$y = N_R \frac{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}{k_{lim}} \qquad \text{(III.2.24)}$$

L'équation (III.2.23) devient :

$$y = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) x + \frac{1}{\ell} \right] \qquad \text{(III.2.25)}$$

C'est donc une droite de pente

$$p = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) \qquad \text{(III.2.26)}$$

et d'ordonnée à l'origine

$$q = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\ell} \qquad \text{(III.2.27)}$$

que l'on pourra identifier par la méthode des moindres carrés. Le dernier coëfficient $(c + 2\mu) \frac{k_o}{g}$ pourra ensuite être déterminé sur l'ensemble des résultats expérimentaux. En effet, d'après l'équation (III.2.21) les points de coordonnées,

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|} \; ; \; pLn \left(\frac{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) + q \frac{k_{lim}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} - N_R \right)$$

doivent s'aligner sur une droite linéaire de pente

$$r = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \frac{k_o}{g} \qquad \text{(III.2.28)}$$

qui pourra également être identifiée par la méthode des moindres carrés. Une fois que p, q et r ont été déterminés, la courbe S-N à la nucléation pour tout chargement proportionnel multiaxial est donnée par :

$$N_R = pLn\left(\frac{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}\right) + q\,\frac{k_{lim}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} - \frac{r}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{(III.2.29)}$$

Dans le paragraphe suivant où sera abordé le problème du cumul du dommage, la seule connaissance des trois constantes $\frac{c + 2\mu}{\ell}$, $\frac{c + 2\mu}{g}\,k_o$ et $(c + 2\mu)\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right)$ ne sera plus suffisante car les coëfficients $\frac{c + 2\mu}{g}$ et $\frac{c + 2\mu}{h}$ apparaîtront alors séparément. Les quatre constantes dont dépendra effectivement le modèle seront $\frac{c + 2\mu}{g}$, $\frac{c + 2\mu}{h}$, $\frac{c + 2\mu}{\ell}$ et k_o.

III-3 CUMUL DU DOMMAGE

En théorie, le problème du cumul du dommage peut maintenant être résolu pour une suite quelconque de chargements périodiques. Toutefois, comme dans le cas du cristal à deux phases et pour les mêmes raisons que celles invoquées alors (II.3), nous nous limiterons aux suites composées de deux chargements proportionnels similaires, le cas des chargements non similaires n'apportant pas d'informations nouvelles.

III.3.1 SUITE DE DEUX CHARGEMENTS CYCLIQUES PROPORTIONNELS SIMILAIRES

Les deux chargements sont définis par la donnée de $\Delta\underline{\underline{S}}^{(i)}$, $\underline{\underline{S}}_m^{(i)}$, $\mathcal{P}_a^{(i)}$ et $\mathcal{P}_m^{(i)}$ pour i = 1 ou 2. La condition de similarité s'écrit :

$$\mathcal{P}_m^{(1)} = \mathcal{P}_m^{(2)} \quad \text{et} \quad \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{\mathcal{P}_a^{(1)}} = \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{\mathcal{P}_a^{(2)}} \qquad \text{(III.3.1)}$$

Nous supposons également que les deux chargements violent le critère de fatigue du matériau, c'est-à-dire que :

$$\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|(i)}{2\sqrt{2}} > k_{lim} \quad , \quad i = 1 \text{ ou } 2 \qquad \text{(III.3.2)}$$

où k_{lim} est la limite d'endurance généralisée caractéristique de la classe de similarité à laquelle appartiennent les deux chargements. k_{lim} est aussi la valeur prise par la limite d'élasticité du cristal dans sa phase de saturation, valeur notée k_s. Par définition, nous avons :

$$k_s = k_{lim} = \frac{-\alpha\mathcal{P}_m(i) + \beta}{\alpha\mathcal{P}_a(i) + \dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|(i)}{2\sqrt{2}}} \cdot \frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|(i)}{2\sqrt{2}} \quad , \quad i = 1 \text{ ou } 2 \qquad \text{(III.3.3)}$$

Enfin, grâce aux conditions de similarité (III.3.1), la courbe d'écrouissage $k(\in^p)$ est unique pour les deux chargements (figure III.4).

Cette même courbe relie donc aussi la limite d'élasticité et la déformation plastique cumulée à tout instant de la suite des deux chargements. Néanmoins, cela ne nous permet pas de raisonner sur la seule limite d'élasticité, (voir § II.3.1) puisque cette dernière ne suffit pas pour caractériser la fin de la phase de saturation.

Les déformations plastiques cumulées $\in^p_I$, $\in^p_{II}$ et $\in^p_R$ qui signalent la fin de la phase de durcissement, de saturation et d'adoucissement respectivement, sont identiques pour les deux chargements et définies par :

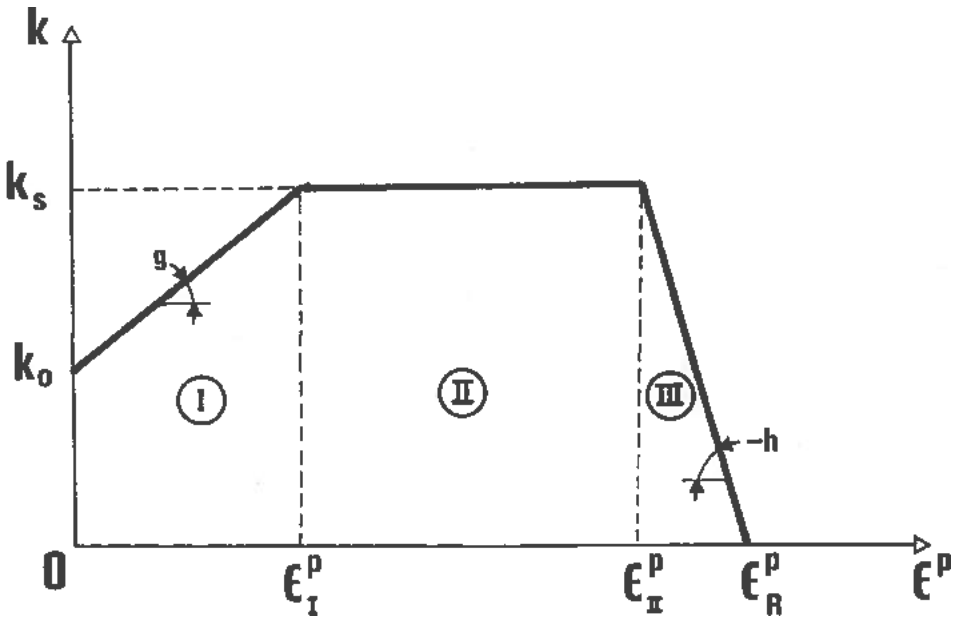


Figure III.4 Courbe d'écrouissage $k(\epsilon^p)$ pour les deux chargements similaires.

$$\left.\begin{aligned} \epsilon^p_I &= \frac{1}{g}\,(k_{lim} - k_o) \\ \epsilon^p_{II} &= \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{\ell}\right) k_{lim} - \frac{k_o}{g} \\ \epsilon^p_R &= \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{h}\right) k_{lim} - \frac{k_o}{g} \end{aligned}\right| \qquad \text{(III.3.4)}$$

Elles sont donc connues d'avance si les constantes du matériau g, ℓ et h ont pû être identifiées.

Nous avons vu, dans le cas du cristal à deux phases, que l'enchaînement des calculs relatifs au cumul du dommage était indépendant de l'ordre d'application des deux chargements (faible-fort ou fort-faible), voir § II.3.1. Nous ne ferons donc aucune hypothèse à priori sur les valeurs relatives de $\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}$ et $\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}$.

Le premier chargement ayant été appliqué durant N_1 cycles, nous cherchons le nombre N_2 de cycles pendant lequel il faudra alors appliquer le second chargement pour obtenir la nucléation d'une fissure de fatigue. En premier lieu, il est nécessaire de savoir dans quelle phase (durcissement, saturation ou adoucissement) se trouve le cristal à la fin du premier chargement. Si $N_I^{(1)}$, $N_{II}^{(1)}$ et $N_{III}^{(1)}$ sont les nombres de cycles écoulés dans les phases de durcissement, de saturation et d'adoucissement respectivement, pour le premier chargement seul, il suffit alors de placer N_1 par rapport à $N_I^{(1)}$, $\left(N_I^{(1)} + N_{II}^{(1)}\right)$ et $N_R^{(1)} = N_I^{(1)} + N_{II}^{(1)} + N_{III}^{(1)}$. Nous allons étudier successivement les trois configurations possibles

$$\left(N_1 \leqslant N_I^{(1)} \ , \ N_I^{(1)} < N_1 \leqslant N_I^{(1)} + N_{II}^{(1)} \right.$$
$$\left. \text{et } N_I^{(1)} + N_{II}^{(1)} < N_1 \leqslant N_R^{(1)}\right)$$

Lorsque $N_1 \leqslant N_I^{(1)}$, le cristal est encore en phase de durcissement quand le premier chargement s'achève. Sa limite d'élasticité est donc (voir équation III.1.16)

$$k(N_1) = \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_I^{(1)}\right)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}g}{A}\right)^{2N_1} \qquad \text{(III.3.5)}$$

où (voir aussi équation III.1.17)

$$k_1^{(1)} = k_o + \frac{g}{A}\left(\| \underline{\underline{S}}_m \|^{(1)} + \frac{\| \Delta \underline{\underline{S}} \|^{(1)}}{2} - \sqrt{2} k_o \right) \qquad \text{(III.3.6)}$$

Le nombre de cycles d'application du second chargement, N_2, se décompose alors en trois parties :

$$N_2 = N_2' + N_2'' + N_2''' \qquad \text{(III.3.7)}$$

En effet, durant le second chargement, le cristal connaît successivement une phase de durcissement de N_2' cycles, une phase de saturation de N_2'' cycles et une phase d'adoucissement de N_2''' cycles avant d'atteindre la rupture. Par définition, N_2' est le nombre de cycles nécessaires pour que la limite d'élasticité du cristal croisse de la valeur $k(N_1)$ à la valeur k_{lim}. Remarquons que $N_1^{(2)}$, le nombre de cycles que dure la phase de durcissement sous le second chargement seul, est aussi le nombre de cycles nécessaires pour que la limite d'élasticité croisse de la valeur $k_1^{(2)}$ à la valeur k_{lim} :

$$N_1^{(2)} = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \operatorname{Ln} \left(\frac{\frac{\| \Delta \underline{\underline{S}} \|}{2\sqrt{2}} - k_1^{(2)}}{\frac{\| \Delta \underline{\underline{S}} \|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) \qquad \text{(III.3.8)}$$

La valeur de N_2' peut donc être obtenue en remplaçant $k_1^{(2)}$ par $k(N_1)$ dans l'équation précédente :

$$N_2' = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{ Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) \qquad \text{(III.3.9)}$$

A la fin de la phase de durcissement, la déformation plastique cumulée vaut $\in_I^p$. Durant la phase de saturation, elle augmente encore jusqu'à la valeur $\in_{II}^p$. Par définition, le nombre de cycles N_2'' que dure cette phase est égal à $N_{II}^{(2)}$, le nombre de cycles que dure la phase de saturation sous le second chargement seul (équation III.2.20)

$$N_2'' = N_{II}^{(2)} = \frac{C}{4\sqrt{2}\ell} \frac{k_{lim}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \qquad \text{(III.3.10)}$$

De même, N_2''' est égal à $N_{III}^{(2)}$, le nombre de cycles que dure la phase d'adoucissement sous le second chargement seul :

$$N_2''' = N_{III}^{(2)} = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \text{ Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) \qquad \text{(III.3.11)}$$

Si le premier chargement s'achève dans la phase de durcissement du cristal, nous avons donc calculé le nombre de cycles $N_R = N_1 + N_2' + N_2'' + N_2'''$ pour lequel il y aura nucléation d'une fissure sous la suite de deux chargements considérés.

Examinons maintenant le cas où, à la fin des N_1 cycles du premier chargement, le cristal est en phase de saturation $\left(N_I^{(1)} < N_1 \leqslant N_I^{(1)} + N_{II}^{(1)}\right)$. Comme la phase de durcissement a nécessité $N_I^{(1)}$ cycles,

$$N_I^{(1)} = \frac{A}{4\sqrt{2}g} \text{Ln} \left(\frac{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_I^{(1)}}{\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right) \qquad \text{(III.3.12)}$$

Le cristal est resté en phase de saturation durant les $N_1 - N_I^{(1)}$ cycles restant. A la fin du premier chargement, la limite d'élasticité du cristal est égale à k_{lim} et sa déformation plastique cumulée $\in^p(N_1)$ vaut (équation III.1.22)

$$\in^p(N_1) = \in_I^p + \frac{4\sqrt{2}}{c} \left(\frac{\|\Delta \underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim} \right) \left(N_1 - N_I^{(1)} \right) \qquad \text{(III.3.13)}$$

Le nombre de cycles d'application du second chargement, N_2, se décompose en deux parties :

$$N_2 = N_2' + N_2'' \qquad \text{(III.3.14)}$$

N_2' est le nombre de cycles nécessaires pour que le cristal achève sa phase de saturation, c'est-à-dire pour que sa déformation plastique cumulée atteigne la valeur $\in_{II}^p$.

A chaque cycle de la phase de saturation, la déformation plastique cumulée augmente d'une quantité constante $\delta\in^{p(2)}$, égale à (voir équation III.1.21) :

$$\delta\epsilon^{p}(2) = \frac{4\sqrt{2}}{C}\left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right) \qquad \text{(III.3.15)}$$

N_2' est donc défini par :

$$\epsilon^{p}_{II} = \epsilon^{p}(N_1) + \frac{4\sqrt{2}}{C}\left(\frac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right) N_2' \qquad \text{(III.3.16)}$$

En remplaçant ϵ^{p}_{II} et $\epsilon^{p}(N_1)$ par leurs valeurs (équations III.3.4 et III.3.14), il vient :

$$N_2' = \frac{C}{4\sqrt{2}\ell}\,\frac{k_{lim}}{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} - \frac{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}\left(N_1 - N_I^{(1)}\right)$$

(III.3.17)

Enfin, N_2'', le nombre de cycles que dure la phase d'adoucissement, est égale à $N_{II}^{(2)}$:

$$N_2'' = N_{II}^{(2)} = \frac{B}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\|\Delta\underline{\underline{S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}\right) \qquad \text{(III.3.18)}$$

Si le premier chargement s'achève durant la phase de saturation du cristal, nous connaissons donc le nombre de cycles écoulés $N_R = N_1 + N_2' + N_2''$ à la nucléation d'une fissure.

Il reste enfin à examiner le cas où, à la fin des N_1 cycles du premier chargement, le cristal est déjà en phase d'adoucissement $\left(N_I^{(1)} + N_{II}^{(1)} < N_1 \leqslant N_R^{(1)}\right)$. Les phases de durcissement et de saturation ayant respectivement nécessité $N_I^{(1)}$ et $N_{II}^{(1)}$ cycles, le cristal reste en phase d'adoucissement durant $N_1 - N_I^{(1)} - N_{II}^{(1)}$ cycles du premier chargement. Sa limite d'élasticité décroît donc de la valeur k_{lim} à la valeur $k(N_1)$ donnée par (voir aussi l'équation III.1.19).

$$k(N_1) = \frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{2}h}{B}\right)^{2\left(N-N_I^{(1)}-N_{II}^{(1)}\right)} \qquad \text{(III.3.19)}$$

Sous le second chargement, le cristal continue en phase d'adoucissement. Pour que sa limite d'élasticité décroisse de la valeur $k(N_1)$ à la valeur nulle, N_2 cycles d'application seront nécessaires. L'expression de N_2 est analogue à celle de $N_{III}^{(2)}$, le nombre de cycles nécessaires pour que la limite d'élasticité du cristal passe de la valeur k_{lim} à la valeur nulle sous le second chargement . En remplaçant k_{lim} par $k(N_1)$ dans l'équation (III.3.18), nous obtenons :

$$N_2 = \frac{B}{4\sqrt{2}h} \operatorname{Ln}\left(\frac{\dfrac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}\right) \qquad \text{(III.3.20)}$$

Nous venons ainsi de calculer le nombre de cycles $N_R = N_1 + N_2$ à la nucléation d'une fissure sous la suite des deux chargements, le premier étant interrompu durant la phase d'adoucissement du cristal.

Comme nous l'avions annoncé dans le paragraphe précédent, pour résoudre le problème du cumul du dommage, il n'est pas nécessaire de connaître séparément les six constantes du matériau $(\mu, g, h, \ell, c, k_o)$ mais seulement les quatre combinaisons $\left(\frac{c + 2\mu}{g}, \frac{c + 2\mu}{h}, \frac{c + 2\mu}{\ell}, k_o\right)$.

En guise d'application, nous allons traiter deux exemples numériques. Les constantes du matériau sont arbitrairement choisies de la manière suivante :

$\alpha = 0,25$

$\beta = 150$ MPa

$k_o = 50$ MPa

$g = 150$ MPa

$h = 30$ MPa

$\ell = 100$ MPa

$c = 0$

$\mu = 70.000$ MPa

Nous choisissons une suite de deux torsions alternées d'amplitude T_a différentes (160 MPa et 320 MPa) et nous considérons successivement le cas où la torsion faible s'effectue d'abord puis le cas où elle s'effectue en seconde position.

Puisque des torsions alternées sont similaires, nous pouvons construire graphiquement les courbes de fractions de vie à partir des courbes de dommage normalisées. Ces dernières donnent $\frac{D(N)}{D_R}$ en fonction de $\frac{N}{N_R}$ (voir figure III.5). Rappelons que cette construction n'est licite que

si le dommage cumulé à la rupture D_R (i.e. la déformation plastique cumulée à la rupture ϵ_R^p) est la même pour les deux chargements ce qui est le cas des chargements similaires.

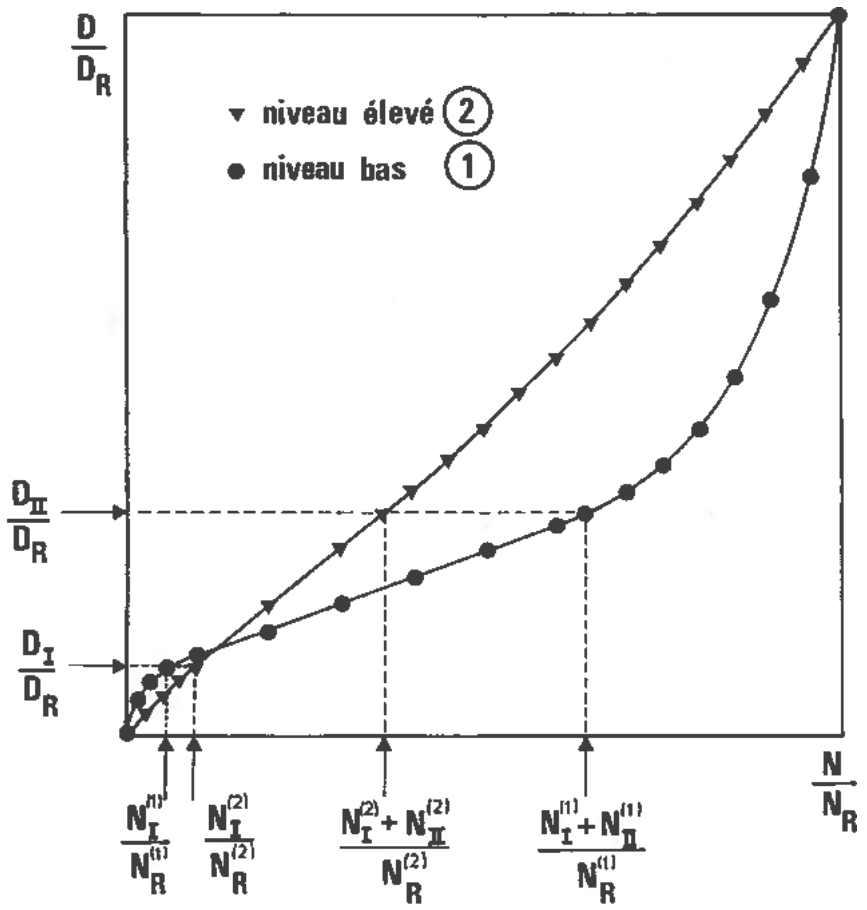


Figure III.5 Courbes de dommage normalisées pour les deux torsions alternées.

Dans le cas où la torsion faible est appliquée en première position, l'allure de la courbe de fractions de vie correspondante (figure III.6), montre que :

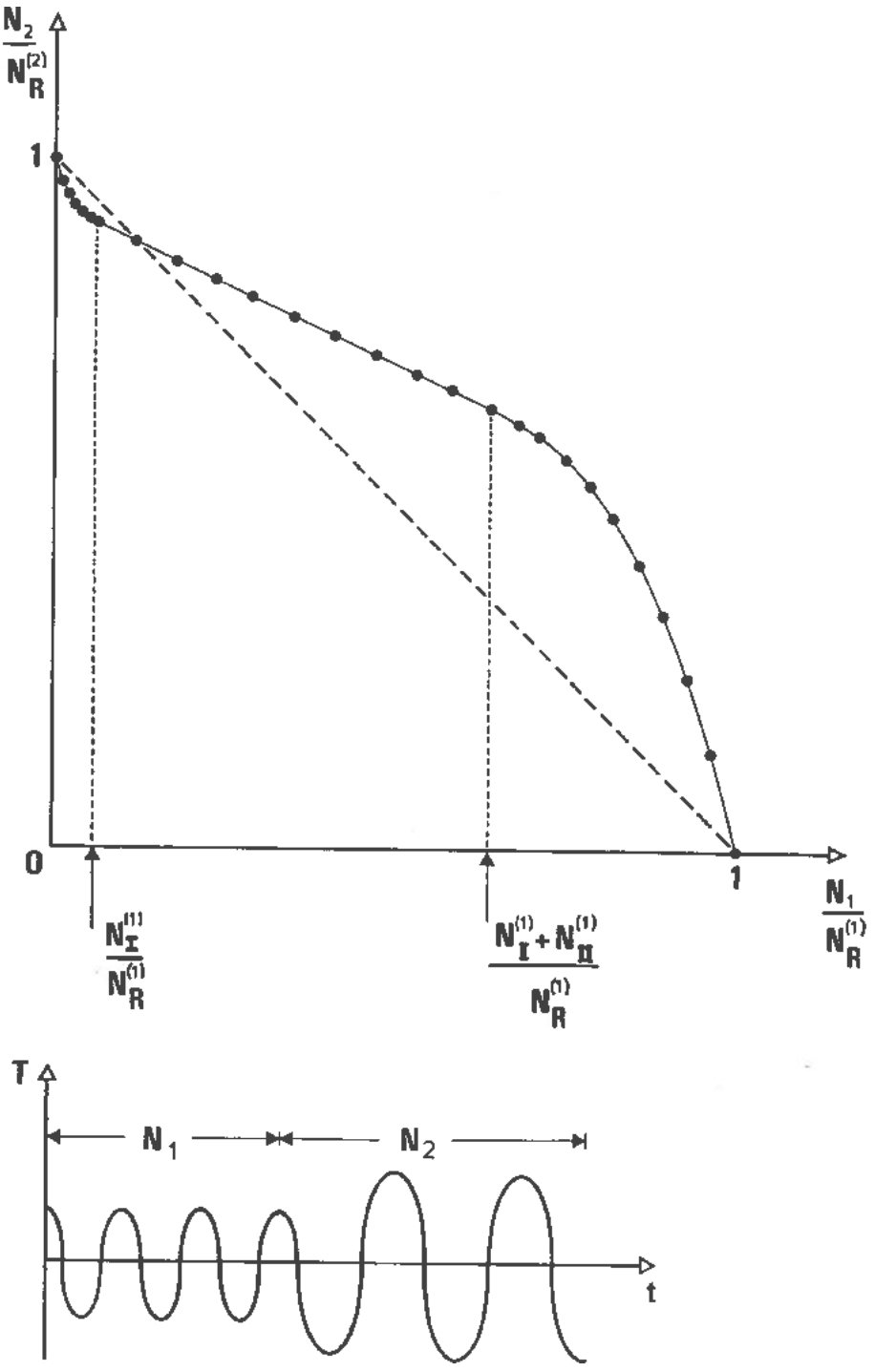


Figure III.6 Diagramme des fractions de vie pour la suite des deux torsions alternées (torsion faible d'abord).

- Une suite de deux chargements cycliques proportionnels similaires, le premier étant plus faible que le second, augmente la durée de vie à la nucléation d'une fissure $\left(\text{i.e. } \frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} > 1\right)$ si le premier chargement est interrompu après que le cristal soit entré en phase de saturation.

- Si le premier chargement est interrompu pendant la phase de durcissement ou au début de la phase de saturation, la même suite a un effet préjudiciable sur la durée de vie de l'éprouvette $\left(\frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} < 1\right)$.

Dans le cas où la torsion faible est appliquée en seconde position, la courbe de fractions de vie obtenue est symétrique de la précédente par rapport à la droite du cumul linéaire (Fig. III.7).

A l'inverse de précédemment, nous arrivons à la conclusion suivante : pour qu'une suite de deux chargements cycliques proportionnels similaires, le premier étant plus fort que le second, augmente la durée de vie au sens où : $\frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} > 1$, il faut que le premier chargement soit interrompu pendant la phase de durcissement ou tout au début de la phase de saturation du cristal. Dans le cas contraire, la durée de vie est diminuée $\left(\text{i.e. } \frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} < 1\right)$.

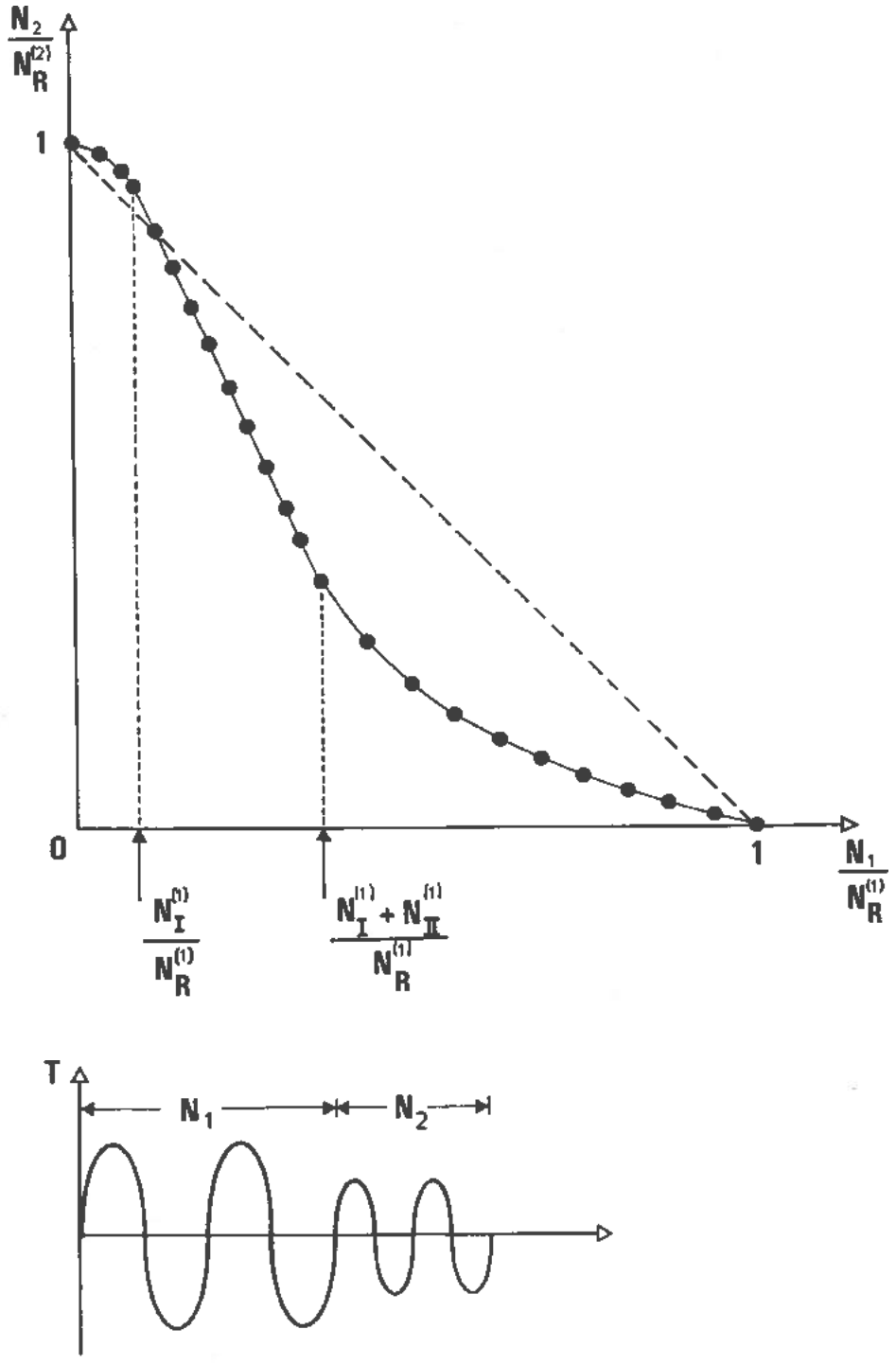


Figure III.7 Diagramme des fractions de vie pour la suite des deux torsions alternées (torsion forte d'abord).

II.3.2 IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE PROPOSE A PARTIR D'UN ESSAI DE CUMUL DU DOMMAGE

Rappelons que l'équation de la courbe de Wöhler généralisée à la nucléation ne dépend que des trois coëfficients suivants :

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{h}\right) \\ q &= \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}}\,\frac{1}{\ell} \\ r &= \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}}\,\frac{k_o}{g} \end{aligned}\right| \qquad \text{(III.3.21)}$$

Ces trois coëfficients peuvent être identifiés à partir d'une seule courbe S-N expérimentale établie pour un chargement uniaxial (voir § III.2.3).

En revanche, la connaissance de p, q et r n'est pas suffisante pour résoudre un problème de cumul du dommage puisque les quatre quantités $\frac{c+2\mu}{g}$, $\frac{c+2\mu}{h}$, $\frac{c+2\mu}{\ell}$, et k_o interviennent séparément dans les équations (voir § III.3.1). Comme pour le cristal à deux phases (voir § II.3.2), nous allons voir qu'il est possible d'identifier le coëfficient $\frac{c+2\mu}{h}$ à partir de l'essai particulier de cumul déjà utilisé. Cette identification, ajoutée à celle de p, q et r permet alors de résoudre n'importe quel problème de cumul du dommage.

Nous considérons donc une suite de deux chargements proportionnels similaires composée d'un premier chargement à la limite du critère de fatigue $\left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} = k_{lim}\right)$ appliqué

sur un très grand nombre de cycles N_1 (10^6 à 10^7) et d'un second chargement violant le critère de fatigue $\left(\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} > k_{lim}\right)$. Dans ce cas, le cristal est encore en phase de durcissement à la fin du premier chargement et sa limite d'élasticité est pratiquement égale à la limite d'endurance :

$$k(N_1) \simeq k_{lim} \quad , \quad N_1 = 10^6 \div 10^7 \qquad \text{(III.3.22)}$$

D'après les résultats obtenus précédemment (§ III.3.1), nous savons que le nombre N_2 de cycles que peut être appliqué le second chargement avant la nucléation d'une fissure de fatigue se décompose en trois parties N_2', $N_2'' = N_{II}^{(2)}$ et $N_2''' = N_{III}^{(2)}$. N_2', le nombre de cycles écoulés avant que le cristal n'achève sa phase de durcissement étant, d'après l'équation (III.3.22) pratiquement nul, nous obtenons :

$$N_2 \simeq N_{II}^{(2)} + N_{III}^{(2)} = \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}\ell} \frac{k_{lim}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} + \left(\frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}h} - \frac{1}{4}\right) \mathrm{Ln}\left(\frac{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\underline{\underline{\Delta S}}\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{lim}}\right)$$

(III.2.23)

Si l'on a mesuré le nombre N_2 de cycles écoulés durant le second chargement, la seule inconnue de cette équation est $\frac{c+2\mu}{h}$, en admettant que $\frac{c+2\mu}{\ell}$ ait déjà été identifié.

Comme pour le cristal à deux phases, il suffit donc d'une courbe S-N expérimentale uniaxiale et d'un essai particulier de cumul du dommage pour identifier les quatre paramètres du modèle.

CONCLUSION

Le but que nous nous étions fixé dans cette partie, à savoir le calcul du nombre de cycles à la nucléation d'une fissure, a bien été atteint.

Le modèle proposé repose sur trois hypothèses fondamentales qui constituent une interprétation possible des expériences effectuées sur des monocristaux. Tout d'abord, nous avons attribué la nucléation d'une fissure de fatigue à la rupture du cristal. Ensuite, pour généraliser la constatation expérimentale de Winter concernant les monocristaux, qui présentent trois phases de comportement sous chargement cyclique, (durcissement - saturation - adoucissement), nous avons supposé que la limite d'élasticité du cristal dans sa phase de saturation coïncide avec la limite d'endurance du chargement auquel il est soumis. Enfin, nous avons étendu cette propriété au cas du cristal à deux phases de comportement cyclique (durcissement - adoucissement), la limite d'endurance coïncidant alors avec la valeur de la limite d'élasticité à la transition entre les deux phases. Le cadre théorique ayant ainsi été établi (Chapitre I), nous avons alors entrepris l'étude du cristal à deux phases, puis à trois phases, dans le cas de chargements cycliques proportionnels multiaxiaux qui présentaient l'avantage de conduire à des solutions analytiques.

Dans le cadre de l'étude du cristal à deux phases de comportement cyclique (Chapitre II), nous avons tout d'abord présenté une nouvelle conception du dommage où la microdéformation plastique cumulée est choisie comme variable d'endommagement. Le critère de fatigue, proposé en termes de contraintes dans la première partie de la thèse, a alors été formulé en termes de dommage. Cette nouvelle interprétation a permis d'étudier les modifications du domaine de non nucléation des fissures de fatigue par des préchargements cycliques. Dans une seconde étape, nous avons obtenu la courbe de Wöhler généralisée à la nucléation d'une fissure pour tout chargement cyclique proportionnel multiaxial. Enfin, nous avons étudié la loi de cumul du dommage pour une suite de deux chargements multiaxiaux proportionnels. Dans le cas de chargements similaires, les exemples numériques présentés reproduisent qualitativement les résultats expérimentaux. Si le premier chargement est le plus faible des deux, la suite a généralement un effet bénéfique sur la durée de vie ; s'il est le plus fort, l'effet est préjudiciable. En revanche, dans le cas de chargements non similaires, pour lesquels nous ne disposons pas de résultats expérimentaux, les exemples numériques conduisent à une prédiction théorique importante : ce n'est plus l'ordre des intensités mais, celui des limites d'endurance des deux chargements, qui modifie l'influence de la suite sur la durée de vie. Si le

premier chargement possède la plus forte des limites d'endurance, l'influence est généralement bénéfique ; dans le cas contraire, elle est préjudiciable. Dans le cas du cristal à deux phases, le modèle de cumul du dommage proposé dépend de cinq paramètres dont deux sont les constantes α et β du critère de fatigue. Les trois autres peuvent être identifiés à partir d'une seule courbe S-N expérimentale uniaxiale à la nucléation et d'un essai de cumul particulier.

L'étude du cristal à trois phases de comportement cyclique (Chapitre III) suit la même progression que celle du cristal à deux phases et conduit d'ailleurs à des résultats similaires. Le modèle de cumul du dommage dépend alors de six paramètres. Le paramètre supplémentaire par rapport au cas du cristal à deux phases est caractéristique de la phase de saturation. Mis à part les constantes α et β du critère de fatigue, ils sont encore identifiables à partir d'une courbe S-N et d'un essai de cumul.

Le modèle proposé reproduit qualitativement les résultats expérimentaux à la rupture d'une éprouvette. Néanmoins, le manque d'expériences à la nucléation d'une fissure n'a pas permis des comparaisons quantitatives. Nous avons également établi des résultats qui correspondent à de nouveaux types d'essais (modification du critère de fatigue par des préchargements cycliques, cumul du dommage pour une

suite de chargements non similaires), qui, nous l'espérons, seront prochainement réalisés. Notons enfin que ce modèle convient à tout chargement périodique multiaxial même non proportionnel ce qui suppose alors une intégration pas à pas.

REFERENCES

[1] CHABOCHE J.L. (1974)

"Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire",

Revue Française de Mécanique, N° 50-51.

[2] CORDIER G. (1980)

"Pour une nouvelle approche de l'analyse des structures soumises à la fatigue oligocyclique",

Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

[3] CORTEN H.T., DOLLAN T.J., (1956)

"Cumulative Fatigue Damage",

Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals Institution of Mechanical Engineers, London.

[4] DANG VAN Ky, RADENKOVIC D. (1978)

"Croissance des fissures en fatigue",

Séminaire Matériau et Structures sous Chargement Cyclique, Association Amicale des Ingénieurs Anciens Elèves de l'E.N.P.C.

[5] GERALD J. (1987)

"De la propagation des fissures de fatigue sous chargement réel polycyclique dans les structures métalliques"

Thèse de l'Université Technologique de Compiègne.

[6] GROSSKREUTZ J.C., MUGHRABI M. (1975)

"Description of the Wordk-Hardened Structure at Low Temperature in Cyclic Deformation",

Constitutive Equations in Plasticity, Argon A.S. Editor.

[7] HASHIN Z. (1978)

"A Cumulative Damage Theory of Fatigue Failure",

Materials Science and Engineering, 34.

[8] HASHIN Z., LAIRD C. (1980)

"Cumulative Damage under Two Level Loading : some Theoretical Predictions and Test Data",

Fatigue of Engineering Materials and Structures, Vol. 2.

[9] KATCHANOV L.M. (1986)

"Introduction to Continuum Damage Mechanics",

Martinus Nijhoff Publishers.

[10] KLESNIL M. LUKAS P. (1980)

"Fatigue of Metallic Materials",

Materials Science Monographs, 7, Elsevier Scientific Publishing Company.

[11] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L. (1978)

"Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement",

Journal de Mécanique Appliquée, Vol. 2, N° 3.

[12] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L. (1985)

"Mécanique des matériaux solides",

Dunod, Paris.

[13] MANSON S.S., HALFORD G.R. (1981)

"Practical Implementation of the double linear damage rule and damage curve approach for treating cumulative fatigue damage",

International Journal of Fracture, Vol. 17, N° 2.

[14] MINER M. (1945)

"Cumulative Damage in Fatigue",

Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, Transactions ASME, Vol. 67.

[15] MUGHRABI M., et al (1983)

"Fatigue Crack Initiation by Cyclic Slip Irreversibilities in High-Cycle Fatigue",

Fatigue Mechanisms : Advances in Quantitative Measurement of Physical Damage, ASTM STP 811, J. Landkford, D.L. Davidson, W.L. Morris, R.P. Wei Editors, American Society for Testing and Materials, Dearborn, Michigan.

[16] PUSKAR A., GOLOVIN S.A. (1985)

"Fatigue in Materials : Cumulative Damage Processes",

Materials Science Monographs 24, Elsevier Scientific Publishing Company,

[17] REMY L. (1984)

"Cyclic Deformation and Crack Initiation Processes",

Proceedings of Fatigue '84.

[18] STARKEY W.L., MARCO S.M. (1957)

"Effects of Complex Stress-Time Cycles on the Fatigue Properties of Metals",

Transactions of the ASME, p.p. 1329-1336.

[19] WINTER A.T. (1974)

"A model for the fatigue of copper at low plastic strain amplitudes",

Philosophical Magasin, 30.

PERSPECTIVES

Cette thèse apporte la preuve que l'approche microscopique peut, au même titre que les approches phénoménologiques plus courantes, conduire à une modélisation réaliste du comportement des matériaux. Nous l'avons en effet systématiquement utilisée tant au niveau de la description qu'au niveau de la modélisation du phénomène de la fatigue polycyclique des métaux et nous avons obtenu des résultats encourageants.

Ceci nous incite à proposer un certain nombre d'améliorations possibles qui constituent autant de perspectives de recherche dans le même domaine.

Tout d'abord, l'hypothèse de Lin Taylor qui a permis d'établir les relations de passage à l'échelle microscopique est relativement grossière. De meilleurs résultats peuvent probablement être obtenus à partir de modèles auto-cohérents.

Un autre "point faible" du modèle proposé est le concept du cristal "moyen" obéissant au critère de von Mises. Il faudrait revenir au critère découlant de la loi de Schmid et suivre l'idée de départ du travail de Grubisic - Simbürger (intégration pondérée par le trajet de chargement) de manière à ce que la multiplicité des plans de glissement activés puisse être prise en compte. Bien entendu, cette approche doit être combinée avec la définition du critère de fatigue comme le domaine d'adaptation potentielle des cristaux plastifiés. Le critère de fatigue obtenu serait alors amélioré vis-à -vis des sollicitations fortement déphasées.

Enfin, nous avons choisi des lois d'écrouissage isotrope linéaires pour décrire les phases de durcissement et d'adoucissement du cristal. Or, les expériences disponibles sur des monocristaux montrent que des lois non linéaires seraient plus réalistes.

Une autre perspective de recherche s'ouvre également dans un domaine voisin qui est celui de la fatigue oligocyclique. La même approche microscopique associée à un modèle auto-cohérent de passage à l'échelle microscopique devrait sans doute conduire à des résultats intéressants.

RESUME

RESUME

Le sujet de la thèse est l'étude du comportement des métaux dans le domaine de la fatigue polycyclique (fatigue à grand nombre de cycles) par l'utilisation systématique de l'approche microscopique. La thèse est composée de deux parties.

Nous étudions d'abord l'endurance illimitée. Un nouveau critère de fatigue est proposé et il est testé sur un grand nombre de résultats expérimentaux. Cette confrontation s'est révélée encourageante.

Dans la seconde partie de la thèse, nous étudions le problème de l'endurance limitée. Nous développons un modèle d'endommagement original, qui permet d'établir la courbe de Wöhler à la nucléation d'une fissure de fatigue, pour tout chargement cyclique proportionnel, multiaxial. Le modèle proposé à également été utilisé pour l'étude des problèmes de cumul du dommage et de modification du critère de fatigue par des préchargements cycliques. Les exemples numériques présentés reproduisent qualitativement les résultats expérimentaux de cumul pour les essais usuels (suite des deux chargements similaires) ; d'autre part, ils stipulent la réalisation de nouveaux types d'essais (suite de chargements non similaires) pour lesquels le modèle proposé conduit à des prédictions théoriques tout à fait nouvelles.

MOTS CLES

Métaux

Fatigue multiaxiale

Elastoplasticité

Cristal

Critères

Endommagement

ABSTRACT

ABSTRACT

The initiation of fatigue cracks in metals is investigated by using a simple microscopic approach (Lin-Taylor model). The thesis is divided in two parts.

Part I is concerned with the fatigue limit (unlimited endurance) problem. A new fatigue criterion, suitable for general periodic loading (proportionnal as well as non-proportionnal), is proposed. A high number of experimental results - from the last 50 years litterature on multiaxial fatigue - is interpreted with the new criterion. The agreement between theoretical predictions and experimental values was fairly good.

Part II of this thesis is concerned with the problem of the fatigue lifetime at crack initiation, in high endurance domain. An original damage model is developped leading to a generalised Wöhler type curve suitable for proportionnal multiaxial fatigue loading. The proposed model is also used to study the fatigue damage accumulation problem. At the beginning the influence of cyclic over - and under - stressing on the initial fatigue limit of the metal is investigated. Then, numerical simulations of the usual two level fatigue tests under similar cyclic loadings (torsion to torsion for exemple) are performed. It is shown that the model correctly reproduces the experimental results of this kind of tests. Finally the model is also

used to carry out numerical simulations of two level fatigue tests under non similar cyclic loadings (torsion to tension for example). The results of these numerical simulations are original and stipulate the realisation of such tests.

KEY WORDS

Metals

Multiaxiale fatigue

Elastoplasticity

Crystal

Criteria

Damage.

TABLE DES MATIERES DETAILLEE

	Page
PREAMBULE	3
PREMIERE PARTIE : ENDURANCE ILLIMITEE	
CHAPITRE I - GENERALITES	11
I.1 - Position du problème et plan de travail	13
I.1.1 Position du problème	13
I.1.2 Plan du travail	15
I.2 - Classification des chargements périodiques	17
I.3 - Quelques définitions utiles	26
CHAPITRE II - CRITERES DE FATIGUE TRADITIONNELS	41
II-1 - Classement des critères	43
II-2 - Critères empiriques	44
II.2.1 Critères de Gough et Pollard	45
II.2.2 Critères de Nishihara-Kawamoto	49
II.2.3 Formule de Davies	49
II.2.4 Formule de Hohenemser et Prager	50
II.2.5 Remarques sur les critères de fatigue empiriques	50
II.3 - Critères de fatigue issus du critère de Tresca	53
II.3.1 Critère de Stulen-Cummings	55
II.3.2 Critère de Findley	59
II.3.3 Critère de Matake	63
II.3.4 Critère de McDiarmid	65

	Page
II.4 - Critères de fatigue issus du critère de von Mises	69
II.4.1 Critère de Marin	70
II.4.2 Critère de Sines	71
II.4.3 Le critère de Crossland	74
II.4.4 Le critère de Kakuno-Kawada	76
II.4.5 L'approche de Deitmann-Issler	77
II.4.6 L'approche de Grubisic-Simbürger	82
II.5 - Remarques sur les critères de fatigue traditionnels	86
CHAPITRE III - L'APPROCHE MICROSCOPIQUE	89
III.1 - Le choix de l'approche microscopique	91
III.1.1 L'approche microscopique : Pourquoi ?	92
III.1.2 Rappel succinct du comportement élastoplastique des cristaux	97
III.2 - Le passage macroscopique - microscopique	102
III.2.1 Les relations générales de passage à l'échelle microscopique	102
III.2.2 Les hypothèses fondamentales de l'approche microscopique choisie	106
III.3 - Le critère de Dang Van	110
III.3.1 Formulation du critère	112
III.3.2 Cas du chargement périodique proportionnel	113
III.3.3 Cas du chargement périodique affine ou général	118

		Page
III.4 -	Un nouveau critère de fatigue	121
III.4.1	Evaluation des contraintes microscopiques résiduelles dans l'état adapté du cristal	121
III.4.2	Cas du chargement périodique radial : solution exacte pour l'état adapté du cristal	133
III.4.3	Formulation du critère de fatigue	148
III.4.4	Similarités et différences du critère proposé avec les critères de Crossland et de Dang Van	156
CHAPITRE IV -	APPLICATIONS	165
IV.1 -	Essais sous chargement à trajet radial ou affine	167
IV.1.1	Essais de flexion-torsion	168
IV.1.2	Essais sur des tubes minces	182
IV.1.3	Essais avec état triaxial des contraintes	187
IV.1.4	Synthèse	189
IV.2 -	Essais de chargement périodique général	191
IV.2.1	Essais en flexion et torsion déphasées	192
IV.2.2	Essais de chargement périodique général avec directions principales du tenseur des contraintes fixes	203
IV.2.3	Synthèse des essais de chargement périodique général	217
CONCLUSION		219
REFERENCES		223
ANNEXE 1 -	La plus petite hypersphère circonscrite à une courbe donnée	237

DEUXIEME PARTIE : ENDURANCE LIMITEE	Page
CHAPITRE I - INTRODUCTION	249
I.1 - Position du problème	251
1.2 - Comportement élastoplastique du cristal	257
CHAPITRE II - CRISTAL A DEUX PHASES DE COMPORTEMENT CYCLIQUE	267
II.1 - Modélisation du comportement élastoplastique du cristal	269
II.1.1 Les équations de base	269
II.1.2 Cas d'un chargement cyclique proportionnel	273
II.2 - Calcul du nombre de cycles à la nucléation d'une microfissure de fatigue	282
II.2.1 Définition d'une variable d'endommagement	283
II.2.2 Interprétation du critère de fatigue en termes de dommage	290
II.2.3 Modification du domaine de non nucléation des fissures de fatigue par un préchargement cyclique	292
II.2.4 Calcul du nombre de cycles effectués dans les deux phases de comportement du cristal	305
II.2.5 Courbe de Wöhler à la nucléation	308
II.3 - Cumul du dommage	317
II.3.1 Suite de deux chargements cycliques proportionnels similaires	318
II.3.2 Identification des paramètres du modèle proposé à partir d'un essai de cumul du dommage	338
II.3.3 Cumul du dommage pour une suite des deux chargements non similaires	341

	Page
CHAPITRE III - CRISTAL A TROIS PHASES DE COMPORTEMENT CYCLIQUE	373
III.1 - Modélisation du comportement élastoplatique du cristal	375
III.1.1 Les équations de base	375
III.1.2 Calcul de la limite d'élasticité du cristal et de sa déformation plastique cumulée	378
III.2 - Calcul du nombre de cycles à la nucléation d'une fissure de fatigue	382
III.2.1 Variable d'endommagement	383
III.2.2 Critère de fatigue	387
III.2.3 Courbe de Wöhler à la nucléation	391
III.3 - Cumul du dommage	397
III.3.1 Suite de deux chargements cycliques proportionnels similaires	397
III.3.2 Identification des paramètres du modèle proposé à partir d'un essai de cumul du dommage	411
CONCLUSION	413
REFERENCES	419
PERSPECTIVES	425
RESUME	429
ABSTRACT	433